Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x - x^2|$.

   (a) **(1,0)** Esboce o gráfico de f.

   (b) **(1,0)** Esboce o gráfico de $g(x) = 1 - f(x-1)$

   (c) **(1,0)** Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$.

   Sol.:

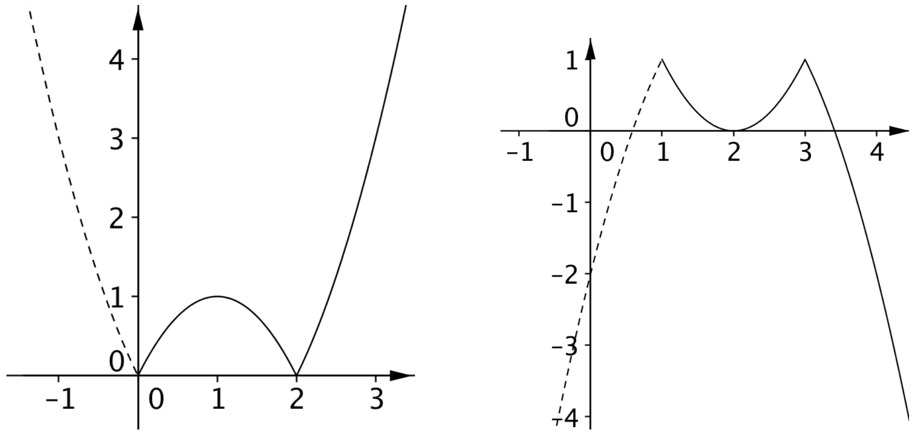


Figura 1: solução de 1.(a) e 1.(b) respectivamente

Sol.: 1.(c) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$ é

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4.$$

Assim, a reta procurada é aquela que tem coeficiente angular 4 e passa por $(3, f(3)) = (3, 3)$, ou seja, $y = 4x - 9$.

2. Calcule os limites

   (a) **(1,5)** $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}{x^2 - 16}$ (b) **(1,5)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x + \operatorname{sen}(x))}{x}$

   Sol.: 2.(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}{x^2 - 16} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})} = \lim_{x\to 4} \frac{x - 2 - 2}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{16\sqrt{2}}.$

   Sol.: 2.(b) Seja $f(x) = 2x + \operatorname{sen}(x)$. Então $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x + \operatorname{sen}(x))}{x} \frac{f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} \frac{f(x)}{x}$. Como $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ então $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$. Além disso $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(2 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}) = 3$. Logo, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{x} = 3$.

3. **(1,0)** Determine os valores de k para que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua:

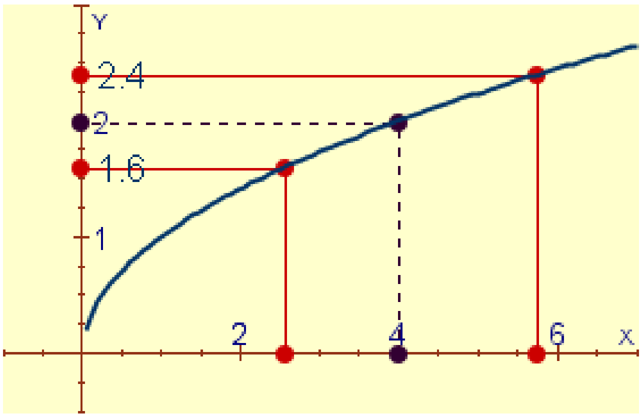
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x; & x < 1 \\ k - x; & x \geq 1 \end{cases}$$

   Sol.: 3. Veja que f é conínua em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Para que f seja contínua em $x = 1$ devemos ter $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} = f(1) = k - 1$. Como $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + 2x = 3$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = k - 1$, f será contínua em $x = 3$ se $k - 1 = 3$, ou seja, $k = 4$.

4. **(1,5)** Encontre um intervalo de comprimento menor do que ou igual a 0.25 que contenha uma raíz de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

   Sol.: 4. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, então pelo T.V.I. existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$. O intervalo $(0, 1)$ tem comprimento 1e portanto não serve. Perceba que $f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1/2 - 1 < 0$. Logo, pelo T.V.I existe uma raíz de f no intervalo $(1/2, 1)$ que tem comprimento 0.5. Mas $f(3/4) = 27/64 + 9/8 - 3/4 - 1 < 0$. Logo, pelo T.V.I existe uma raíz de f no intervalo $(3/4, 1)$ que tem comprimento 0.25.

5. **(1,5)** A figura abaixo representa o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre o maior número $\delta > 0$ tal que $|\sqrt{x} - 2| < 0.4$ sempre que sempre que $|x - 4| < \delta$.



Sol.: 5. Seja $x_0 = (1.6)^2 = 2.56$ e $x_1 = (2.4)^2 = 5.76$. Como $4 - x_0 = 1.44$, $x_1 - 4 = 1.56$ e $|\sqrt{x} - 2| < 0.4$ sempre que a distância de x a 4 for menor que a distância de x_0 a 4 e que a distância de x_1 a 4. Segue que $\delta = 1.44$.