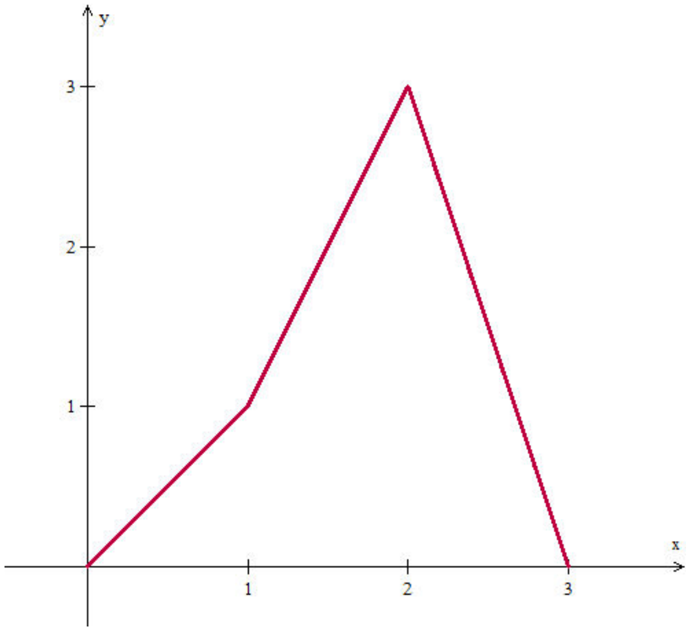
Gabarito

1. Considere a função cujo gráfico está representado abaixo.



(a) **(1,0)** Esboce o gráfico de $g(x) = \frac{f(3x)}{3}$.

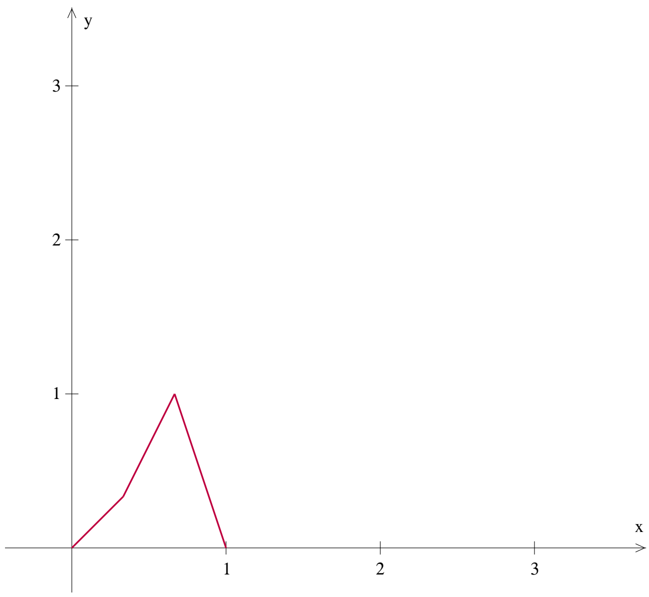


Figura 1: Resposta do item A

(b) **(1,0)** Esboce o gráfico de $h(x) = |f(x-1) - 1| - 1$

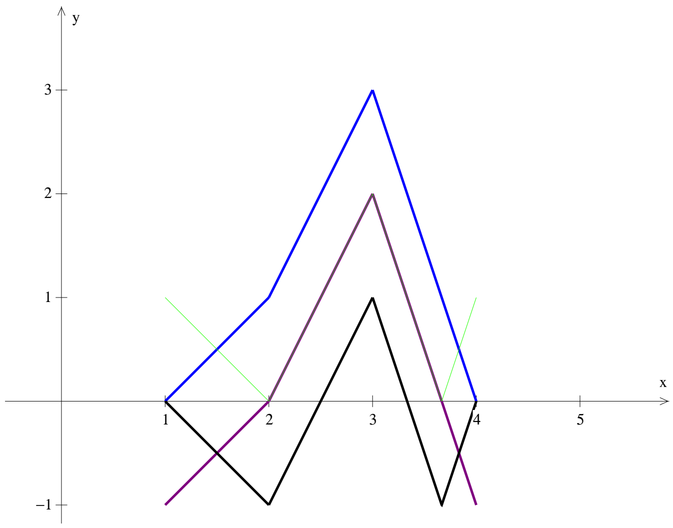


Figura 2: Resposta do item B: linha azul é $f(x-1)$; linha roxa é $f(x-1)-1$; linha verde é $|f(x-1)-1|$ e linha preta é $|f(x-1)-1|-1$.

(c) **(1,0)** Exiba o maior intervalo no qual f é invertível e esboce o gráfico da sua inversa.

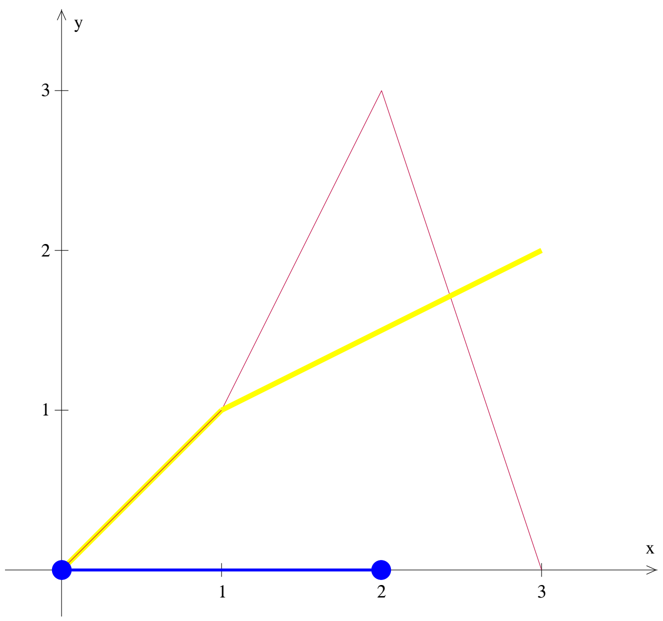


Figura 3: Resposta do item C: [0,2] é o maior intervalo onde f é invertível, e o gráfico amarelo é a inversa em questão.

2. Verdadeiro ou falso? (justifique!)

(a) **(0,5)** Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Solução: Verdadeiro. Neste caso temos $\lim_{x\to 5} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2}{0} = \infty$.

(b) **(0,5)** Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) \cdot f(1) < 0$, então f possui um raiz no intervalo (0,1).
Solução: É falso pois, sem a hipótese de que f é contínua, podemos criar o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$$

(c) **(0,5)** Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é crecente e contínua, então $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Solução: Falso pois basta considerar a função $f(x)=\arctan(x)$ que é crescente, contínua e tende a $\pi/2$ quando $x\to+\infty$.

(d) **(0,5)** Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é crecente, então f é injetora.
Solução: Verdadeira. Se $x_1\neq x_2$, digamos $x_1<x_2$, então por hipótese $f(x_1)<f(x_2)$. Em particular $f(x_1)\neq f(x_2)$.

3. Calcule os limites:

(a) **(1,0)** $\lim_{x\to 0}(x^2-x+1)^{\frac{1}{3x}}$

Solução: $\lim_{x\to 0}(x^2-x+1)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^2-x)^{\frac{1}{x^2-x}}\right]^{\frac{x^2-x}{3x}}=e^{\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{3x}\right)}=e^{-1/3}$.

(b) **(1,0)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan(\operatorname{sen}(e^x))}{x}$

Solução: Temos que $\dfrac{-\pi}{4x}=\dfrac{\arctan(-1)}{x}\leq\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan(\operatorname{sen}(e^x))}{x}\leq\dfrac{\arctan(1)}{x}=\dfrac{\pi}{4x}$.
Como $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\pm\pi}{4x}=0$, pelo Teorema do Sanduiche temos que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan(\operatorname{sen}(e^x))}{x}=0$.

(c) **(1,0)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2\sqrt{x}-3}$

Solução: Fazendo a mudança de variável $x=y^2$ o limite acima passa a ser $\lim_{y\to 1}\dfrac{\sqrt{y^2+3}-2}{y^4+2y-3}=$
$\lim_{y\to 1}\dfrac{(\sqrt{y^2+3}-2)(\sqrt{y^2+3}+2)}{(y^4+2y-3)(\sqrt{y^2+3}+2)}=\lim_{y\to 1}\dfrac{y^2-1}{(y-1)(y^3+y^2+y+3)(\sqrt{y^2+3}+2)}=$
$\lim_{y\to 1}\dfrac{y+1}{(y^3+y^2+y+3)(\sqrt{y^2+3}+2)}=\dfrac{1}{12}$.

(d) **(1,0)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)+\tan(4x)}{\cos(x)+\tan(5x)-1}$

Solução: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)+\tan(4x)}{\cos(x)+\tan(5x)-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{3x}+\frac{4\tan(4x)}{4x}}{\frac{\cos(x)-1}{x}+\frac{5\tan(5x)}{5x}}=\dfrac{3+4}{0+5}=\dfrac{7}{5}$.

4. **(1,0)** Note que 2 e 4 são soluções da equação $x^2=2^x$. Prove que esta equação tem uma solução negativa.
Solução: O problema é equivalente ao de provar que a função contínua $f(x)=x^2-2^x$ tem uma raiz negativa. Agora note que $f(-1)=1/2>0$ e que $f(0)=-1<0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, f possui uma raiz entre -1 e 0.