[UFES-CCE-DMAT-Prova2-Cálculo1-Equipe-Tarde, 29/10/14]

Gabarito

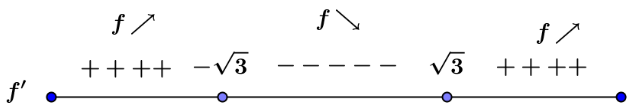
1. Considere $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Determine:

   (a) **(0,5pt)** Domínio, zeros e assíntotas de f.

   Solução: Domínio$=\mathbb{R}-\{1,-1\}$ (0,1pt); zeros$=\{0\}$ (0,1pt); assíntotas de f: $x=1$ (0,1pt), $x=-1$ (0,1pt); $y=x$ (0,1pt).

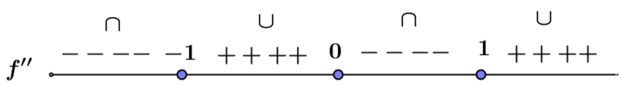
   (b) **(0,5pt)** Regiões de crescimento-decrescimento, máximos e mínimos locais.

   Solução: Sendo $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ (0,1pt) temos: crescente em $(-\infty,-\sqrt{3}]$; decrescente em $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]-\{\pm 1\}$ e crescente em $[\sqrt{3},+\infty)$ (0,2pt); máximo local em $-\sqrt{3}$ (0,1pt) e mínimo local em $\sqrt{3}$ (0,1pt).



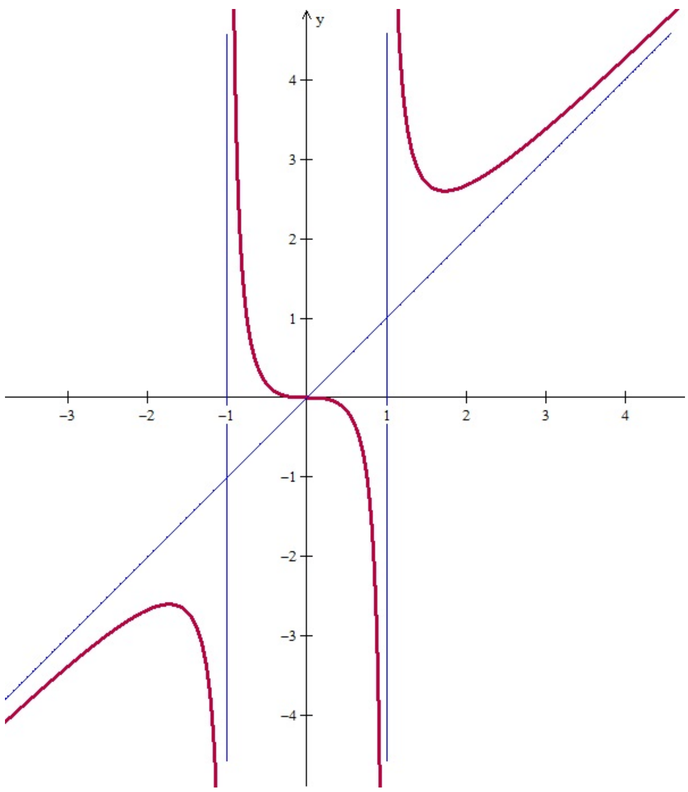
   (c) **(0,5pt)** Concavidades e pontos de inflexão.

   Solução: Sendo $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ (0,2pt); pontos de inflexão: $\{\pm 1; 0\}$ (0,1pt); concavidades (0,2pt):



   (d) **(0,5pt)** Esboço do gráfico de f.

   Solução:



3. Calcule:

(a) **(1pt)** $\lim_{x\to+\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$;

Solução: $\lim_{x\to+\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1/x^2)\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \sec^2(1/x) = 1.$

(b) **(1pt)** a derivada de $y(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+e^x\text{sen}(x)}$;

Solução: $y' = \dfrac{[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x][x+e^x\text{sen}(x)] - \sqrt{x^2+1}[1+e^x\text{sen}(x)+e^x\cos(x)]}{[x+e^x\text{sen}(x)]^2}$

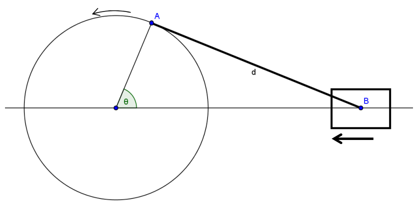
(c) **(1pt)** $y'(0)$ sabendo que $2y = \ln(\sin(y+x))$ e $y(0) = \frac{\pi}{4}$;

Solução: Derivando a identidade em relação a x temos: $2y' = \dfrac{\cos(y+x)}{\text{sen}(y+x)}(y'+1)$. Substituindo $x=0$ temos $2y'(0) = \dfrac{\cos(y(0))}{\text{sen}(y(0))}(y'(0)+1)$, ou seja, $2y'(0) = \text{cotan}(y(0))(y'(0)+1)$, donde, $2y'(0) = y'(0)+1$ e portanto $y'(0) = 1$.

(d) **(1pt)** as retas tangentes ao gráfico de $y = x^2$ que passam pelo ponto (0,-4).

Solução: A reta tangente no ponto (a,a^2) é $y - a^2 = 2a(x-a)$ (0,5pt), e para conter o ponto (0,-4) devemos ter $-4-a^2 = -2a^2$ donde $a = \pm 2$ (0,5pt). As retas são $y-4 = 4(x-2)$ e $y-4 = -4(x+2)$.

4. **(2pts)** Um pistão está anexado a um virabrequim conforme a figura. A haste de conexão AB tem 15cm de comprimento e o raio do virabrequim tem 5cm. Se o virabrequim faz duas rotações por segundo no sentido anti-horário, qual é a velocidade do pistão no instante em que A atinge a altura máxima?



Solução: Seja x a distância de B ao centro da circunferência. Note que $\theta' = 4\pi\ rad/s$ (0,5pt). Relacionando as grandezas, pela lei dos cossenos temos $15^2 = 5^5 + x^2 - 2\cdot 5x\cos(\theta)$ (0,5pt). Derivando temos $2xx' = 10x'\cos(\theta) - 10x\text{sen}(\theta)\theta'$ (0,5pt). Para $\theta = \pi/2$ temos $x = 10\sqrt{2}$ (teorema de Pitágoras) e portanto $x' = -20\pi$ (0,5pt). O sinal de menos significa que o pistão está se aproximando do centro da circunferência.

5. Responda V ou F, justificando sua resposta.

(a) **(1pt)** Se o ponto de máximo absoluto de uma função coincide com o ponto de mínimo absoluto, então a função é constante.

Solução: Verdade. Digamos que $a \in Dm(f)$ seja máximo absoluto e mínimo absoluto de f. Agora, tome qualquer $x \in Dm(f)$. Sendo a ponto de máximo absoluto, temos $f(a) \geq f(x)$; e sendo a ponto de mínimo absoluto, temos $f(a) \leq f(x)$. Com isso, $f(a) \geq f(x)$ e $f(a) \leq f(x)$, logo, $f(x) = f(a)$. Asim, a imagem de qualquer elemento é igual a imagem de a, ou seja, f é constante.

(b) **(1pt)** O retângulo de maior área com perímetro p é um quadrado com aresta medindo $p/4$.

Solução: Verdade. Se x e y são as medidas dos lados do retângulo, então o problema é: maximizar $A(x,y) = xy$ sujeito à $2x+2y = p$ (0,5pt). Eliminando a variável y temos $A(x) = x(p/2 - x)$ cujo máximo ocorre em $x = p/4$, donde $y = p/4$ (0,5pt).