Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

   (a) **(0,5)** Determine a composta $g(f(x))$;

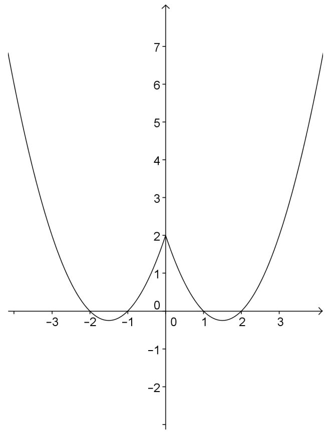
   Sol.: $g(f(x)) = |x|^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (b) **(0,5)** Encontre o domínio e a imagem de $g(f(x))$;

   Sol.: O Domínio de $g(f(x))$ é $\mathbb{R}$. Pelo item anterior temos que a imagem de $g(f(x))$ é $\{x \in \mathbb{R}; x \geq -\frac{1}{4}\}$. Veja que $-\frac{1}{4}$ é a coordenada y do vértice das duas parábolas que compõem o gráfico de $g(f(x))$.

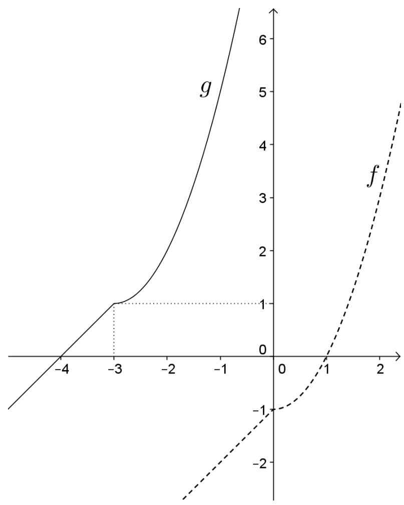
   (c) **(1,0)** Esboce o gráfico de $g(f(x))$.

   Sol.:



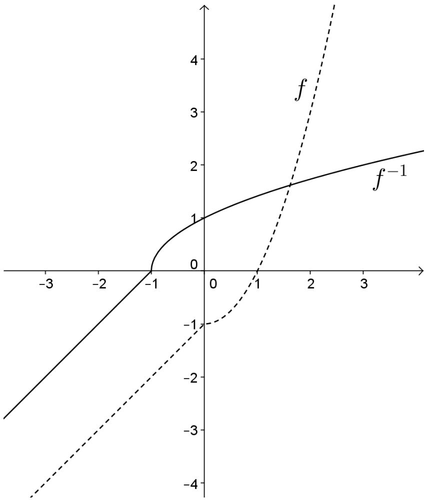
2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \ x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se} \ x < 0 \end{cases}$.

   (a) **(1,0)** Esboce o gráfico de $g(x) = 2 + f(x + 3)$. **Sol.:**



   (b) **(1,0)** Encontre a expressão de f^{-1} e esboce o seu gráfico.

   Sol.: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} & \text{se} \ x \geq -1 \\ x + 1 & \text{se} \ x < -1 \end{cases}$.



3. Calcule os limites caso existam.

   (a) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x}+2x$

   Sol.: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x}+2x\dfrac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x})}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2|x|\sqrt{(1+\frac{1}{4x})}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-2x(\sqrt{(1+\frac{1}{4x})}+1)} = -\dfrac{1}{4}$

   (b) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2-2x)}{x^2}$

   Sol.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2-2x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2-2x)}{x^2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2-2x)}{(x^2-2x)^2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{x^2}$.
   Como $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos(y)}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos(y)}{y^2}\dfrac{1+\cos(y)}{1+\cos(y)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(y)}{y^2}\dfrac{1}{1+\cos(y)} = \dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2-2x)^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(x-2)^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(x-2)^2 = 4$. Portanto $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2-2x)}{x^2} = 2$.

   (c) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-1})}{\sqrt{\ln(x+1)}}$

   Sol.: $-1 \leq \operatorname{sen}(e^{x-1}) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $\dfrac{-1}{\sqrt{\ln(x+1)}} \leq \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-1})}{\sqrt{\ln(x+1)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}}$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{\ln(x+1)}} = 0$, pelo Teorema do comfronto $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-1})}{\sqrt{\ln(x+1)}} = 0$

4. **(1,5)** Encontre um intervalo de tamanho 0,5 que contenha uma raíz da equação $2^{-x} = x$.

   Sol.: Seja $f(x) = 2^{-x} - x$. Então, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -\frac{1}{2} < 0$ e f é contínua em $\mathbb{R}$. Temos ainda que $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$. Pelo T.V.I temos que exite $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$. Este x_0 é tal que $2^{-x_0} = x_0$.