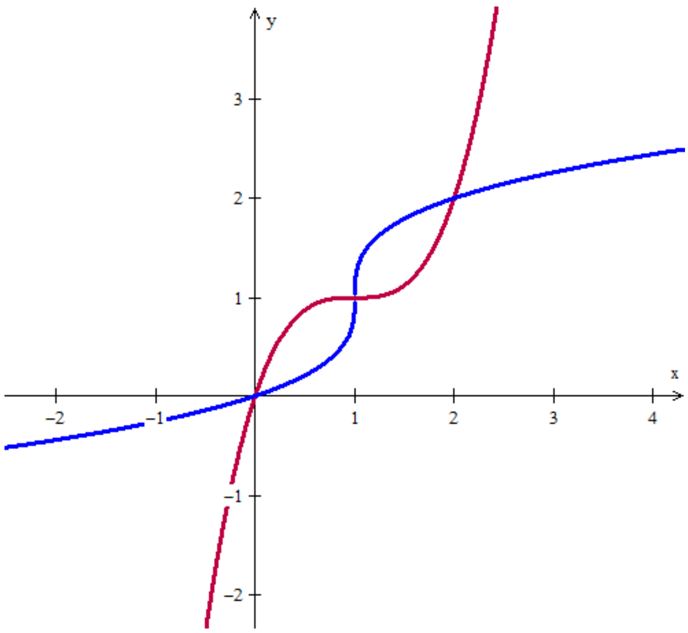
Gabarito

1. Considere $f(x) = (x-1)^3 + 1$.

   (a) **(1,0)** Determine o domínio, a imagem, a raiz e o gráfico de f.

   Solução: $Dm(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; 0 é a única raiz de f; gráfico de f está abaixo em vermelho.



   (b) **(1,0)** Exiba a expressão de f^{-1} e esboce seu gráfico.

   Solução: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$; o gráfico está acima em azul.

2. Calcule os seguintes limites:

   (a) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

   Solução: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2\sqrt{1+1/x^4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{1+1/x^4}} = 0.$

   (b) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}$

   Solução: De $0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, pelo Teorema do Sanduíche temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} = 0$.

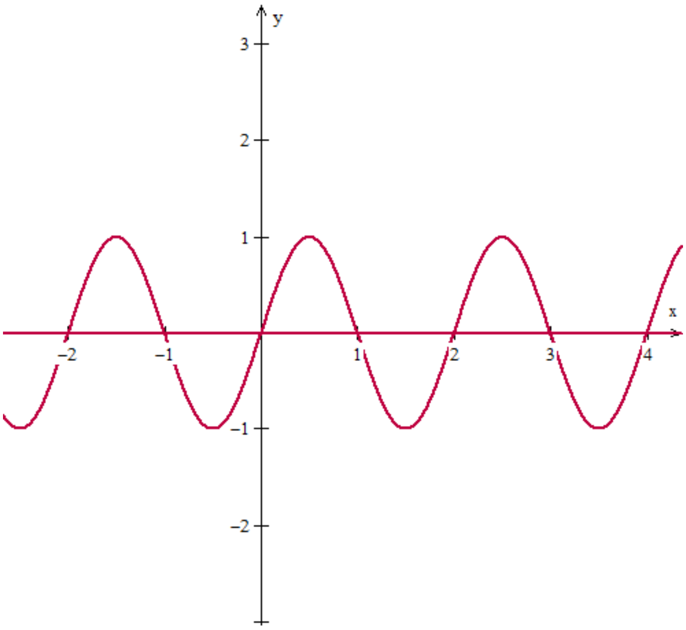
   (c) **(1,5)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt[3]{2-x}-1}$

   Solução: Fazendo a substituição $x = 2 - y^3$ o limite fica $\lim\limits_{y\to1} \dfrac{\sqrt{y^3+3}-2}{y-1}$. A solução deste é a seguinte:

   $$\lim_{y\to1} \frac{\sqrt{y^3+3}-2}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{(\sqrt{y^3+3}-2)(\sqrt{y^3+3}+2)}{(y-1)(\sqrt{y^3+3}+2)} = \lim_{y\to1} \frac{(y^3-1)}{(y-1)(\sqrt{y^3+3}+2)} =$$
   $$\lim_{y\to1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(\sqrt{y^3+3}+2)} =$$
   $$\lim_{y\to1} \frac{(y^2+y+1)}{(\sqrt{y^3+3}+2)} = \frac{3}{4}.$$

3. **(1,0)** Exiba os pontos de continuidade da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Solução: Note que f oscila infinitas vezes do gráfico de $\operatorname{sen}(\pi x)$ para a função nula em qualquer intervalo onde estas funções são distintas. Assim, nenhum limite lateral existe onde $\operatorname{sen}(\pi x)$ não é nulo. Nos pontos onde $\operatorname{sen}(\pi x)$ se anula os limites existem e é nulo. Com isso, os pontos de continuidade são as raízes de $\operatorname{sen}(\pi x)$, ou seja, os números inteiros (ver figura abaixo).



4. **(1,5)** Prove que qualquer que seja o número $a > 0$ o polinômio $P(x) = 3x^8 - 5x^5 + x^2 - a$ possui pelo menos duas raízes reais.

Solução: Sabemos que P é contínua em $\mathbb{R}$. Note que $P(0) = -a < 0$ e que $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. Com isso, P assume valores positivos antes e depois de a. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, P possui uma raiz antes de a e uma depois de a.

5. Responda V ou F, justificando suas respostas.

(a) **(0,5)** Se f é contínua em a, então $\lim_{x\to a} \dfrac{a}{f(x)}$ existe.

Solução: Falso. Considere $f(x) = (x-1)^2$. Assim, f é contínua em $a = 1$ e $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ não existe.

(b) **(0,5)** $f(x) = \frac{2\cdot\arctan(x)}{x}$ é impar.

Solução: Falso. $f(-x) = \dfrac{2\cdot\arctan(-x)}{-x} = \dfrac{-2\cdot\arctan(x)}{-x} = \dfrac{2\cdot\arctan(x)}{x} = f(x)$.