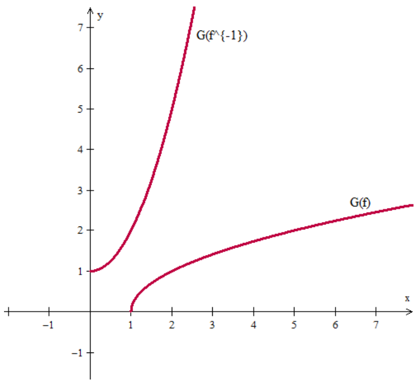
[UFES-CCE-DMAT-Prova1-Cálculo1-Equipe-Tarde, 01/04/15]

Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. Considere $f(x) = \sqrt{x-1}$.

   (a) **(0,7)** esboce o gráfico de f

   (b) **(0,8)** esboce o gráfico de f^{-1}



2. **(0,5)** Exiba o domínio da função $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Solução: $x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1$ e $1 \leq x$.

3. **(1,0)** Encontre os valores de x que satisfazem a inequação $\dfrac{x-1}{x+2} < 1$.

Solução: $\frac{x-1}{x+2} < 1 \iff \frac{x-1}{x+2} - 1 < 0 \iff \frac{-3}{x+2} < 0 \iff x > -2$.

4. **(1,0 cada)** Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\tan(7x)} =$ $\lim_{x\to 0} \frac{3}{7}\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{7x}{\tan(7x)} = 3/7$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3} =$ $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+9}+3)}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+4}+2)} = 6/4 = 3/2.$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2} =$ $\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(x+2)} = 80.$

5. **(2,0)** Considere $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, encontre $f'(a)$ usando a definição.

$$f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}{b-a} = \lim_{b\to a} \frac{(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})}{(b-a)(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})} =$$
$$\lim_{b\to a} \frac{(b-a)}{(b-a)(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})} = \lim_{b\to a} \frac{1}{(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

6. **(1,0)** Exiba os pontos de descontinuidade da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < 0. \\ 2 - 2x, & \text{se } 0 \leq x < 1. \\ x^2 - 1, & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

Como polinômios são funções contínuas, resta verificar se as emendas são contínuas. Isto só ocorre nos pontos 0 e 1. Com isso,
$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 - 2x = 2 \neq \lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 - x^2 = 1$
$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0 = \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} 2 - 2x = 0$
Assim, h é descontínua somente em $x = 0$ pois neste caso os limites laterais são distintos.