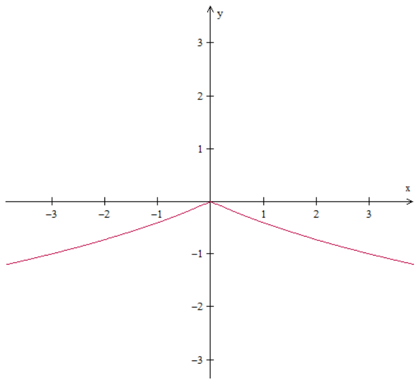
[UFES-CCE-DMAT-Prova1-Cálculo1-Equipe-tarde, 31/08/15]

Gabarito

1. **(2,0)** Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - \sqrt{|x| + 1}$



2. **(1,0 cada)** Calcule o limite se existir e justifique caso não exista.

   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

   $= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2+x-1}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = -1.$

   (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+4}$

   $= \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}} \overset{x\leq 0}{=}$
   $\lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(1-\frac{4}{x})}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)} = -1/2.$

   (c) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}}$

   $= \lim_{x\to 2}[(1+2-x)^{\frac{1}{2-x}}]^{-1} \overset{<y=2-x>}{=} \lim_{y\to 0}[(1+y)^{\frac{1}{y}}]^{-1} = e^{-1}.$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(5x)}{2^x - 1}$

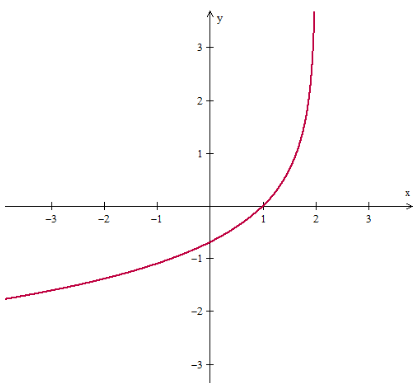
   $= \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{x}{2^x-1} = 5.1.\frac{1}{\ln 2} = \frac{5}{\ln 2}.$

3. Considere a função $f(x) = 2 - e^{-x}$. Determine:

   (a) **(0,5)** Domínio, raízes e assíntotas de f;

   $Dm(f) = \mathbb{R}$; raiz$=\ln(1/2) = -\ln 2$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$ donde $y = 2$ é uma assíntota horizontal; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) **(1,0)** Esboce o gráfico de f^{-1}.



4. **(1,0)** Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x-1}$ no ponto $P = (2,1)$.

   $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = 1/2$. Assim, a equação da reta é $y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$.

5. **(1,5)** Mostre que a equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ possui pelo menos quatro raízes reais e exiba um intervalo de tamanho 1/2 que contém uma dessas raízes.

   Note que a função é contínua, é par, $f(0) = 5 > 0$, $f(1) = -4 < 0$ e $f(2) = 2^{10} - 40 + 5 > 0$. Pelo T.V.I., f possui raízes nos intervalos (0,1) e (1,2). Sendo par, possui pelo menos quatro raízes.
   Agora observe que $f(1/2) = \frac{1}{2^{10}} - \frac{5}{2} + 5 > 0$. Pelo T.V.I, f possui uma raíz no intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$.