UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CCE/UFES
3ª Prova de Cálculo I – MAT05114 – Prof. Antônio Luíz Rosa

Aluno: ____ **Data: 29/06/15.**

Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

Questão 1 (3,0 pontos): Considere a função:

$$f(x) = -\frac{2}{x^3+1}.$$

a) Determine D(f), o domínio da função f;
b) Calcule as interseções com os eixos, caso existam;
c) Mostre que:

$$f'(x) = \frac{6\,x^2}{(x^3+1)^2};\ f''(x) = \frac{12\,x(1-2\,x^3)}{(x^3+1)^2}$$

d) Encontre os pontos críticos;
e) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f(x);
f) Encontre os máximos e mínimos, se existirem;
g) Determine a concavidade e os pontos de inflexão, caso existam;
h) Encontre as assíntotas horizontais e/ou verticais;
i) Utilize as informações obtidas nos itens anteriores parar esboçar o gráfico de f.

Solução: Temos:

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$
b) Interseções com os eixos:
   - $f \cap Ox = \{(x,y) \mid f(x) = 0\}$. Mas, $f(x) \neq 0, \forall\, x \in D(f)$.
     Logo, $f \cap Ox = \emptyset$.
   - $f \cap Oy = \{(0,y) \mid f(0) = y\}$.
   $$y = f(0) \Leftrightarrow\ y = -\frac{2}{0^3+1} \Leftrightarrow\ y = -2.$$
     Logo, $f \cap Oy = \{(0,-2)\}$.
c) Derivadas:

$$f(x) = -\frac{2}{x^3+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(x^3+1)\cdot(2)' - 2\cdot(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{(x^3+1)\cdot(0) - 2\cdot 3\,x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-6\,x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{6\,x^2}{(x^3+1)^2}}.$$

$$f'(x) = \frac{6\,x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(x^3+1)^2\cdot(6\,x^2)' - 6\,x^2\cdot[(x^3+1)^2]'}{(x^3+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3+1)^2\cdot 12\,x - 6\,x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3\,x^2}{(x^3+1)^4} \Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{12\,x(1-2\,x^3)}{(x^3+1)^3}}.$$

d) Pontos Críticos:
Temos que $\nexists f'(x)$ em $x = -1$ mas como $-1 \notin D(f)$, $x = -1$ não é ponto crítico de f.
Agora, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Portanto, $x = 0$ é o único ponto crítico da função f.
e) Intervalos de Crescimento e Decrescimento:
Vemos claramente que $f'(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$. Portanto, a função é crescente em todo intervalo de definição.
f) Máximos e mínimos de f.

Visto que a função é crescente em todo o domínio, conclui-se que ela não possui nem máximo e nem mínimo.

g) Concavidades e pontos de inflexão:

Temos: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12\,x(1-2\,x^3) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1/\sqrt[3]{2}$.

Intervalo	$12\,x$	$1-2\,x^3$	$(x^3+1)^3$	$f''(x)$	$f(x)$
$x < -1$	-	+	-	+	Côncava p/ cima
$-1 < x < 0$	-	+	+	-	Côncava p/ baixo
$0 < x < 1/\sqrt[3]{2}$	+	+	+	-	Côncava p/ cima
$x > 1/\sqrt[3]{2}$	+	-	+	-	Côncava p/ baixo

Assim, temos:

- f é côncava para cima em $(-\infty,-1) \cup \left(0, 1/\sqrt[3]{2}\right)$.
- f é côncava para baixo em $(\,-1,0) \cup \left(1/\sqrt[3]{2}\,, \infty,\right)$.

Conclui-se daí que $(0,-1)$e $\left(1/\sqrt[3]{2}\,, -1/3\right)$ são pontos de inflexões da função f.

h) Assíntotas:

Horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^3+1}\right) = -\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}\right) = 0.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal no gráfico de f.

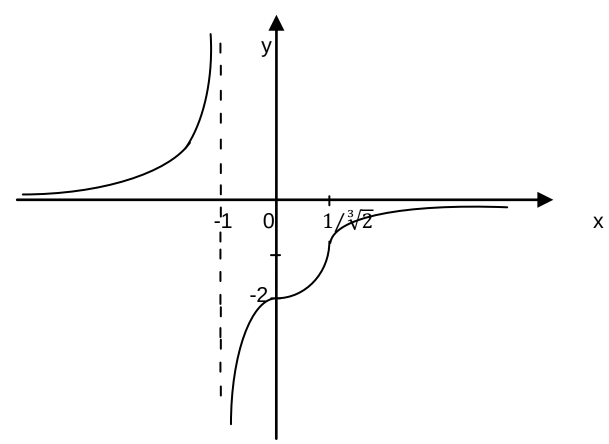
Verticais:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2}{x^3+1}\right) = -\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2}{0^-}\right) = -(-\infty) = \infty.$$

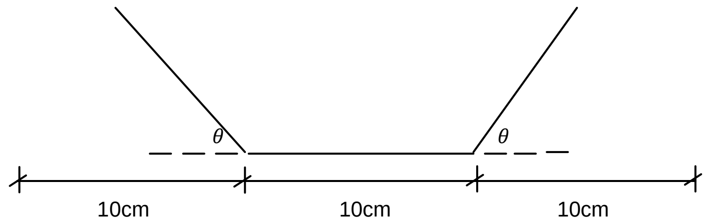
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2}{x^3+1}\right) = -\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2}{0^+}\right) = -(\infty) = -\infty.$$

Logo, $x = -1$ é uma assíntota vertical no gráfico de f.

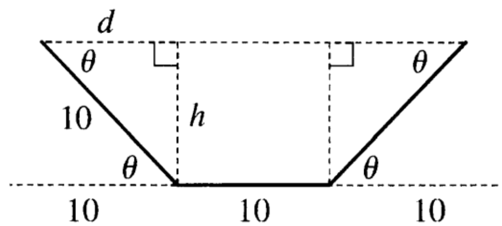
i) Gráfico:



<u>Questão 2</u> (1,0 ponto). Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura $30\ cm$ dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



<u>Solução</u>: Para termos a capacidade máxima da calha, devemos ter a área da seção transversal da calha máxima:



Assim, iremos maximizar a área do trapézio acima.
Temos:

$$A(\theta) = A_{triângulo} + A_{trapézio} + A_{triângulo} = \frac{1}{2}\, d \cdot h + 10\, h + \frac{1}{2}\, d \cdot h = d \cdot h + 10\, h$$

$$A(\theta) = (10 \cos\theta) \cdot (10\, sen\, \theta) + 10\,(10\, sen\, \theta) = 100\,(sen\, \theta + sen\, \theta \cos\theta).\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Daí temos:

$$A'(\theta) = 100\,(cos\, \theta + cos^2\, \theta - sen\, \theta \cos\theta) = 100\,(cos\, \theta + 2\, cos^2\, \theta - 1)$$

$$A'(\theta) = 100\,(2\, cos\, \theta - 1)(cos\, \theta + 1).$$

Assim,

$$A'(\theta) = 0 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}} cos\, \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.\ (cos\, \theta \neq -1 \text{ visto que } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}).$$

Portanto, deve-se ter $\theta = \frac{\pi}{3}$ para que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima.

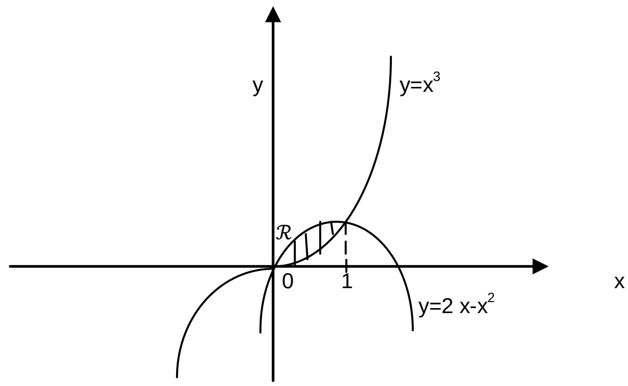
<u>Questão 3</u> (3,0 pontos). Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2\,x - x^2$. Pede-se:

(a) Esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$ no intervalo.
(b) Calcule a área de $\mathcal{R}$.
(c) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x.
(d) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo y.

<u>Solução</u>: (a) Gráfico da Região $\mathcal{R}$.

$$x^3 = 2\,x - x^2 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 2\,x = 0 \Longrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Como queremos considerar a região $\mathcal{R}$ no primeiro quadrante, então o intervalo de integração a ser considerado é $[0, 1]$.



b) Cálculo da área de $\mathcal{R}$.

$$A = \int_0^1 [(2\,x - x^2) - x^3]\ dx = \int_0^1 (2\,x - x^2 - x^3)\ dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 1^2 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} = \frac{12 - 4 - 3}{12} = \frac{5}{12}.$$

Portanto,

$$\boxed{A = \int_0^1 [(2\,x - x^2) - x^3]\ dx = \frac{5}{12}}$$

c) Cálculo do volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x.(Método de Fatias)

$$A(x) = \pi(2\,x - x^2)^2 - \pi(x^3)^2 = \pi(4\,x^2 - 4\,x^3 + x^4 - x^6)$$

Logo,

$$V = \int_0^1 A(x)\ dx = \int_0^1 \pi(4\,x^2 - 4\,x^3 + x^4 - x^6)\ dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right]_0^1$$

$$V = \pi\left(\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \Longrightarrow \boxed{V = \frac{41}{105}\pi}$$

d) Cálculo do volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo y. (Método das Cascas Cilíndricas)

$$V = \int_0^1 2\,\pi\,x(2\,x - x^2 - x^3)\ dx = \int_0^1 2\,\pi(2\,x^2 - x^3 - x^4)\ dx$$

$$V = 2\,\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 2\,\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \Longrightarrow \boxed{V = \frac{13}{30}\pi}$$

<u>Questão 4</u> (4,0 pontos). Calcule:

$$(a)\ \int \left(x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)\ dx\ ;\quad (b)\ \lim_{x \to (\pi/2)^-} (tg\ x)^{\cos x}\ ;$$

$$(c)\ \int_0^3 |x^2 - 4|\,dx\ ;\quad (d)\ \lim_{x \to 0}\ [cotg\ (2\,x) \cdot sen\ (6\,x)]$$

<u>Solução</u>: Temos:

a) $\int\left(x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)\ dx$.

Faça $u = x^3 + 1$. Então, $du = 3\,x^2\ dx$ e $x^3 = u - 1$. Logo,

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\ dx = \int x^2 \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\ dx = \int u^{1/3} \cdot (u - 1) \cdot \left(\frac{1}{3}\ du\right)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1}\ dx = \frac{1}{3}\int \left(u^{4/3} - u^{1/3}\right) du = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}u^{7/3} - \frac{3}{4}u^{4/3}\right) + C$$

$$\boxed{\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1}\ dx = \frac{1}{7}(x^3+1)^{7/3} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{4/3} + C}$$

b) $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(tg\ x)^{\cos x}$.

Faça $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(tg\ x)^{\cos x} = L$.

Assim,

$$L = \lim_{x\to(\pi/2)^-}(tg\ x)^{\cos x} \Longrightarrow \ln L = \ln\left(\lim_{x\to(\pi/2)^-}(tg\ x)^{\cos x}\right)$$

$$\Longrightarrow \ln L = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \ln(tg\ x^{\cos x}) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}[\cos x \cdot \ln(tg\ x)]$$

$$\underbrace{=}_{0\cdot\infty} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\ln(tg\ x)}{1/\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\ln(tg\ x)}{\sec x} \underbrace{=}_{\substack{\frac{\infty}{\infty} \\ L.H}} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{(1/tg\ x)\cdot sec^2 x}{\sec x \cdot tg\ x}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{tg^2\ x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\cos x}{sen^2\ x} = \frac{0}{1^2} = 0.$$

Então,

$$\ln L = 0 \Longrightarrow e^{\ln L} = e^0 \Longrightarrow L = 1.$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to(\pi/2)^-}(tg\ x)^{\cos x} = 1}$$

c) $\int_0^3 |x^2-4|\ dx$.

Temos:

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, se\ x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty) \\ -(x^2-4), se\ x\in[-2,2] \end{cases}.$$

Logo,

$$\int_0^3 |x^2-4|\ dx = \int_0^2 (4-x^2)\ dx + \int_2^3 (x^2-4)\ dx$$

$$\int_0^3 |x^2-4|\ dx = \left[4\ x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4\ x\right]_2^3$$

$$\int_0^3 |x^2-4|\ dx = \left(4\cdot(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(0) - \frac{0^3}{3}\right) + \left(\frac{3^3}{3} - 4\cdot(3)\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4\cdot(2)\right)$$

$$\int_0^3 |x^2-4|\ dx = 8 - \frac{8}{3} - 0 + \frac{0}{3} + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = 13 - \frac{16}{3} = \frac{23}{3}.$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^3 |x^2-4|\ dx = \frac{23}{3}}$$

d) $(d)\ \lim_{x\to 0}\ [cotg\ (2\ x)\cdot sen\ (6\ x)]$.

Este limite é do tipo $\infty \cdot 0$. Vamos transformá-lo do tipo $\frac{0}{0}$ para aplicarmos L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0}\ [cotg\ (2\ x)\cdot sen\ (6\ x)] = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ (6\ x)}{tg\ (2\ x)} \overset{L.H.}{\cong} \lim_{x\to 0} \frac{6\ sen\ (6\ x)}{2\ sec^2\ (2\ x)} = \frac{6\ (1)}{2\ (1)^2} = 3.$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\ [cotg\ (2\ x)\cdot sen\ (6\ x)] = 3}$$