Cálculo I - MAT09570
Primeira prova - 16/09/2016

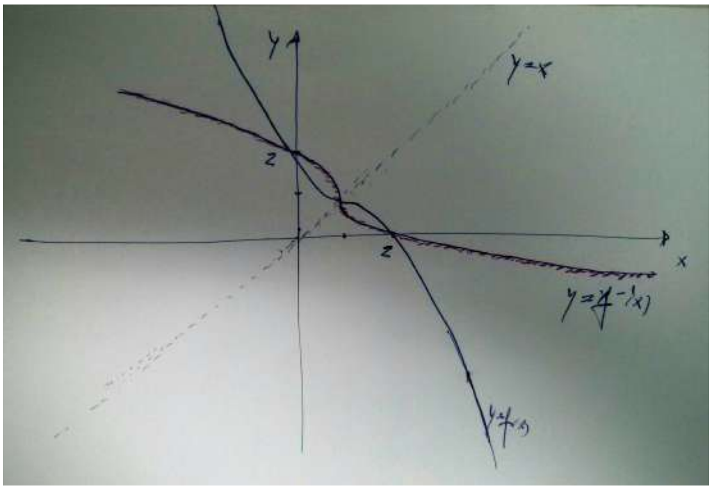
1. **(1.5pts)** Seja $f(x) = -(x-1)^5 + 1$.

   (a) Determine $f^{-1}(x)$.

   (a) $y = -(x-1)^5+1 \Leftrightarrow (x-1)^5 = 1-y \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[5]{1-y} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{1-y}+1$.
   Logo $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{1-x} + 1$.

   (b) Esboce o gráfico de f e de f^{-1}, apresentando os pontos de interseção com os eixos Ox e Oy.

   (b) O gráfico de f é obtido do gráfico de x^5 deslocando-o para direita uma unidade, seguido de uma reflexão no eixo Ox e, depois, fazendo um deslocamento para cima por uma unidade. Nota: $f(0) = 2$, e $f(x) = 0$ quando $x = 2$. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com respeito à reta $y = x$ como em baixo:

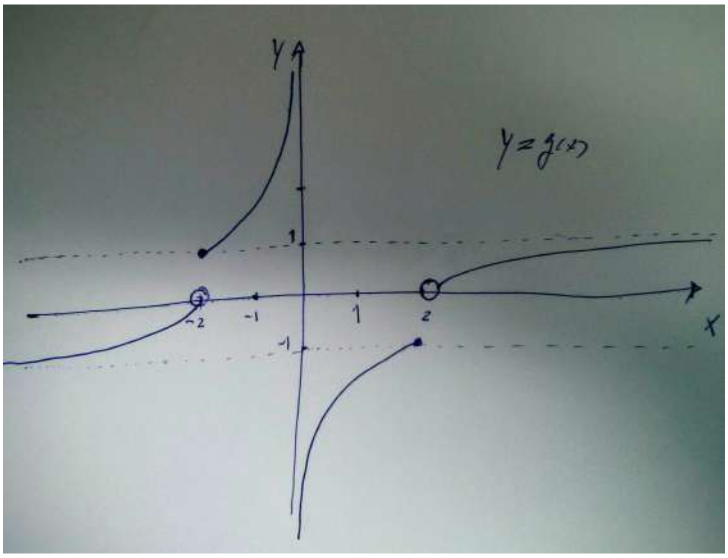


2. **(2.0pts)** Esboce o gráfico de uma função $y = g(x)$ que satisfaça todas as condições:

   (a) g é impar;
   (b) g é injetora;
   (c) $x = 0$ é assíntota vertical de g;
   (d) g é crescente no intervalo $(0, 2)$;
   (e) $g(2) = -1$;
   (f) g tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
   (g) g é descontínua em $x = 2$;

(h) $y = 1$ é assíntota horizontal de g.

Por exemplo:



3. **(4.0pts)** Determine, justificando, se existem os limites seguintes:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

(Exercício 13, revisão da seção 2)
Substituição direta leva a uma indeterminação ∞/∞. Utilizando a maior potência de x do denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}/x}{(2x-6)/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-9/x^2}}{2-6/x} = \frac{\sqrt{1-0}}{2-0} = 1/2.$$

(b) $\lim_{x\to1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

(Exemplo 8, seção 2.5)
Substituição direta leva a uma indeterminação $0/0$. Utilizando o conjugado $a+b$ na fatoração de $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \lim_{x\to1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to1} \arcsin\left(\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \arcsin\left(\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi/6.
\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}}$

Substituição direta leva a uma indeterminação 0/0. Podemos utilizar o limite fundamental $\sin(y)/y \to 1$, quando $y \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = \sqrt{1\cdot 2} = \sqrt{2}.$$

(d) $\lim_{x\to 1} |\log x| \sin(\frac{1}{e^x-1})$

Por substituição direta:

$$\lim_{x\to 1} |\log x| \sin(\frac{1}{e^x-1}) = |\log 1| \sin(\frac{1}{e-1}) = 0. \sin(\frac{1}{e-1}) = 0.$$

4. **(1.0pts)** Determine os valores de a de modo que f fique contínua em toda a reta real, onde

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq a \\ x^2, & x > a. \end{cases}$$

Para $x \neq a$ f é polinomial e, logo, contínua. Basta determinar os valores de a tais que f seja contínua para $x = a$ (se existirem). Como

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} x = a,$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} x^2 = a^2,$$

concluímos que f é contínua para $x = a$ (e, logo, na reta) se e só se $a = a^2$, i.e., $a = 0$ ou $a = 1$.

5. **(1.5pts)** Indique, justificando, as afirmações que são verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as afirmações que são falsas:

(a) *Se f é diferenciável em $x = 0$, então $|f|$ também é diferenciável para $x = 0$.*

Falso. A função $f(x) = x$ é diferenciável em $x = 0$, mas $|f(x)| = |x|$ não é diferenciável para $x = 0$.

(b) *Se f é uma função contínua em toda a reta real, e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, então f tem pelo menos um zero.*

Verdadeiro. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, existe b tal que $f(b) > 0$. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, existe a tal que $f(a) < 0$. Uma vez que f é contínua em $[a, b]$, concluímos, pelo teorema do valor intermediário, que existe c no intervalo (a, b) tal que $f(c) = 0$.

6. **(extra 1pts)**. Suponha que f é uma função que satisfaz

$$f(x+h) - f(x) = f(h) + x^2h + xh^2$$

para quaisquer números reais x, h. Suponha também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1.$$

(a) Determine $f(0)$.

Pondo $x = h = 0$, segue que $f(0) - f(0) = f(0)$, logo $f(0) = 0$.

(b) Determine $f'(0)$.

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$.

(c) Determine $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + x^2h + xh^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + x^2 + xh \right) = 1 + x^2. \end{aligned}$$

(Problemas quentes 13 p.155)