

1. (1 ponto) Encontre os valores de  $b$  tais que o valor médio de  $f(x) = 5 + 6x - 3x^2$  no intervalo  $[0, b]$  é igual a 1.

**Solução:** Temos que:

$$f_{med} = \frac{1}{b-0} \int_0^b f(x) dx.$$

Pelos dados do problema temos:

$$\begin{cases} f_{med} = \frac{1}{b} \int_0^b (5 + 6x - 3x^2) dx \Rightarrow 1 = \frac{1}{b} [5x + 3x^2 - x^3]_0^b \\ f_{med} = 1 \\ \Rightarrow 1 = 5 + 3b - b^2 \Rightarrow b^2 - 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$b^2 - 3b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow b = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Como  $b > 0$ , segue que a resposta é então  $\boxed{b = 4}$ .

2. (1 ponto) Se  $f$  for uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t) dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

para todo  $x$ , ache uma fórmula explícita para  $f(x)$ . [Dica: use o Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)]

**Solução:** Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1): Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$ , então a função  $g$  definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  e  $g'(x) = f(x)$ .

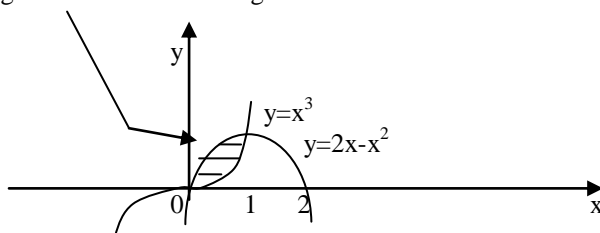
Logo, aplicando a diferenciação em ambos lados da equação dada, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x f(t) dt \right) &= \frac{d}{dx} \left( xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) \\ \frac{d}{dx} \left( \int_0^x f(t) dt \right) &= \frac{d}{dx} (xe^{2x}) + \frac{d}{dx} \left( \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) \\ \Rightarrow f(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} + e^{-x} f(x) \Rightarrow f(x)(1 - e^{-x}) = e^{2x} + 2xe^{2x} \\ &\boxed{f(x) = \frac{e^{2x}(1 + 2x)}{1 - e^{-x}}} \end{aligned}$$

3. Seja  $\mathcal{R}$  a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas  $y = x^3$  e  $y = 2x - x^2$ . Calcule as seguintes quantidades:

- (a) (1 ponto) A área de  $\mathcal{R}$ .  
 (b) (1,5 pontos) O volume obtido pela rotação de  $\mathcal{R}$  ao redor do eixo  $x$ .  
 (c) (1,5 pontos) O volume obtido pela rotação de  $\mathcal{R}$  ao redor do eixo  $y$ .

**Solução:** A região  $\mathcal{R}$  é mostrada na figura abaixo:



Interseções entre as curvas:

$$x^3 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Como estamos interessados somente na região  $\mathcal{R}$  (primeiro quadrante), então as interseções a serem consideradas são quando  $x = 0$  e  $x = 1$ .

Assim temos:

(a) Área de  $\mathcal{R}$ :

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^1 (2x - x^2 - x^3) dx = \left[ x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\boxed{A(\mathcal{R}) = \frac{5}{12}}$$

(b) Uma seção transversal no sólido obtido da rotação da região  $\mathcal{R}$  ao redor do eixo  $x$  é uma anel cilíndrico com raio interior  $r_1 = x^3$  e raio exterior  $r_2 = 2x - x^2$ , e então, sua área é

$$A(x) = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi[(2x - x^2)^2 - (x^3)^2]$$

Então:

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi[(2x - x^2)^2 - (x^3)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^6) dx = \pi \left[ \frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1$$

$$= \pi \left( \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{41}{105}\pi$$

$$\boxed{V = \frac{41}{105}\pi}$$

(c) Usando o método de casacas cilíndricas temos:

$$V = \int_0^1 2\pi x (2x - x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx$$

$$= 2\pi \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = 2\pi \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 2\pi \left( \frac{13}{60} \right) = \frac{13}{30}\pi$$

$$\boxed{V = \frac{13}{30}\pi}$$

4. (1 ponto cada item) Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} dr$ ; (b)  $\int \operatorname{tg}^6(5y) dy$ ; (c)  $\int x\sqrt{1-x^4} dx$ ;

(d)  $\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx$ ; (e)  $\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx$ .

**Solução:**

(a) Aqui, o aconselhável é fazer integração por partes. Faça

$$\begin{cases} u = r^2 \\ r \\ dv = \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2r dr \\ v = \sqrt{4+r^2} \end{cases}$$

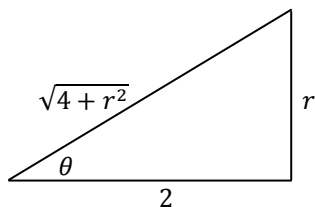
Então,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} dr = \left[ r^2 \sqrt{4+r^2} \right]_0^1 - \int_0^1 2r \sqrt{4+r^2} dr = \sqrt{5} - \frac{2}{3} [(4+r^2)^{3/2}]_0^1$$

$$= \sqrt{5} - \frac{2}{3} (5)^{3/2} + \frac{2}{3} (4)^{3/2} = \sqrt{5} - \frac{10}{3} \sqrt{5} + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} \sqrt{5}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} dr = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} \sqrt{5}}$$

**Solução(2):** Faça:



$$\begin{aligned} r &= 2 \operatorname{tg} \theta \\ dr &= 2 \sec^2 \theta d\theta \\ \sqrt{4+r^2} &= 2 \sec \theta \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} dr &= \int \frac{(2 \operatorname{tg} \theta)^3}{2 \sec \theta} 2 \sec^2 \theta d\theta = \int 8 \operatorname{tg}^3 \theta \sec \theta d\theta = 8 \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta \\ &= 8 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta = 8 \left[ \int (\sec^2 \theta) \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta - \int \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta \right] \\ &= 8 \left( \frac{1}{3} \sec^3 \theta - \sec \theta \right) = 8 \left( \frac{1}{3} \frac{(4+r^2)\sqrt{4+r^2}}{8} - \frac{\sqrt{4+r^2}}{2} \right) \\ &= \frac{(4+r^2)\sqrt{4+r^2}}{3} - 4\sqrt{4+r^2} = \frac{(r^2-8)\sqrt{4+r^2}}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}} dr = \left[ \frac{(r^2-8)\sqrt{4+r^2}}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{5}$$

(b) Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^6(5y) &= \operatorname{tg}^4(5y) \operatorname{tg}^2(5y) = \operatorname{tg}^4(5y) [\sec^2(5y) - 1] \\ &= \operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - \operatorname{tg}^4(5y) = \operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - [\operatorname{tg}^2(5y) \operatorname{tg}^2(5y)] \\ &= \operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - \{\operatorname{tg}^2(5y) [\sec^2(5y) - 1]\} \\ &= \operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - \operatorname{tg}^2(5y) \sec^2(5y) + \operatorname{tg}^2(5y) \\ &= \operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - \operatorname{tg}^2(5y) \sec^2(5y) + \sec^2(5y) - 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \operatorname{tg}^6(5y) dy = \int [\operatorname{tg}^4(5y) \sec^2(5y) - \operatorname{tg}^2(5y) \sec^2(5y) + \sec^2(5y) - 1] dy$$

Agora, temos que:

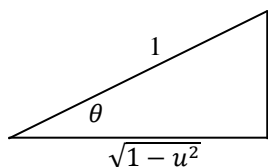
$$\int \operatorname{tg}^n(ay) \sec^2(ay) dy = \frac{1}{(n+1)a} \operatorname{tg}^{n+1}(ay) + C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então,

$$\int \operatorname{tg}^6(5y) dy = \frac{1}{25} \operatorname{tg}^5(5y) - \frac{1}{15} \operatorname{tg}^3(5y) + \frac{1}{5} \operatorname{tg}(5y) - y + C$$

(c) Faça,  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx$ . Então,  $x^4 = u^2$ ,  $x dx = du/2$ :

$$\int x\sqrt{1-x^4} dx = \int \sqrt{1-u^2} \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-u^2} du$$



$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} \theta \\ du &= \cos \theta d\theta \\ \sqrt{1-u^2} &= \cos \theta; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Agora temos:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^4} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} [1 + \cos(2\theta)] d\theta = \frac{1}{4} \left[ \int d\theta + \int \cos(2\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right] + C = \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} \operatorname{sen}(2\theta) + C \\ &= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + C = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{1}{4} u \sqrt{1-u^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4} x^2 \sqrt{1-x^4} + C \end{aligned}$$

$$\int x\sqrt{1-x^4} dx = \frac{1}{4}\text{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1-x^4} + C$$

(d) Temos que:  $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$ . Daí,

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} \Rightarrow \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} = \frac{A(x^2 + 3) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 3)}$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 = A(x^2 + 3) + (Bx + C)x$$

Tomando  $x = 0$ , obtemos:  $6 = A(3) \Rightarrow \boxed{A = 2}$ . Assim, a equação acima passa a ser:

$$x^2 - x + 6 = (2 + B)x^2 + Cx + 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 + B = 1 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B = -1} \\ \boxed{C = -1} \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} = \frac{2}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 3} \Rightarrow \int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx = \int \left( \frac{2}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 3} \right) dx$$

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 3} dx - \int \frac{1}{x^2 + 3} dx$$

$$= 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx = 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

(e) Faça  $u = 1 + \sqrt{x}$ . Então,  $x = (u - 1)^2$ ,  $dx = 2(u - 1) du$ . Ainda,

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = \int_1^2 u^8 2(u - 1) du = 2 \int_1^2 (u^9 - u^8) du = 2 \left[ \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^9}{9} \right]_1^2$$

$$= 2 \left[ \frac{2^{10}}{10} - \frac{2^9}{9} - \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{9} \right) \right] = 2 \left( \frac{1024}{10} - \frac{512}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right) = 2 \left( \frac{1023}{10} - \frac{511}{9} \right)$$

$$= \frac{1023}{5} - \frac{1022}{9} = \frac{4097}{45}$$

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = \frac{4097}{45}$$

**Solução(2):** Faça:

$$(1 + \sqrt{x})^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (\sqrt{x})^k$$

$$(1 + \sqrt{x})^8 = 1 + 8\sqrt{x} + 28x + 56x\sqrt{x} + 70x^2 + 56x^2\sqrt{x} + 28x^3 + 8x^3\sqrt{x} + x^4$$

$$(1 + \sqrt{x})^8 = 1 + 8x^{1/2} + 28x + 56x^{3/2} + 70x^2 + 56x^{5/2} + 28x^3 + 8x^{7/2} + x^4$$

Daí,

$$\int (1 + \sqrt{x})^8 dx = \int (1 + 8x^{1/2} + 28x + 56x^{3/2} + 70x^2 + 56x^{5/2} + 28x^3 + 8x^{7/2} + x^4) dx$$

$$= x + \frac{16}{3} x^{3/2} + 14x^2 + \frac{112}{5} x^{5/2} + \frac{70}{3} x^3 + \frac{112}{7} x^{7/2} + 7x^4 + \frac{16}{9} x^{9/2} + \frac{1}{5} x^5 + C$$

Assim,

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = \left[ x + \frac{16}{3} x^{3/2} + 14x^2 + \frac{112}{5} x^{5/2} + \frac{70}{3} x^3 + \frac{112}{7} x^{7/2} + 7x^4 + \frac{16}{9} x^{9/2} + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1$$

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = 1 + \frac{16}{3} + 14 + \frac{112}{5} + \frac{70}{3} + \frac{112}{7} + 7 + \frac{16}{9} + \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = 22 + \frac{86}{3} + \frac{113}{5} + \frac{112}{7} + \frac{16}{9} = \frac{6930 + 9030 + 7119 + 5040 + 560}{315}$$

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = \frac{4097}{45}$$