

Gabarito

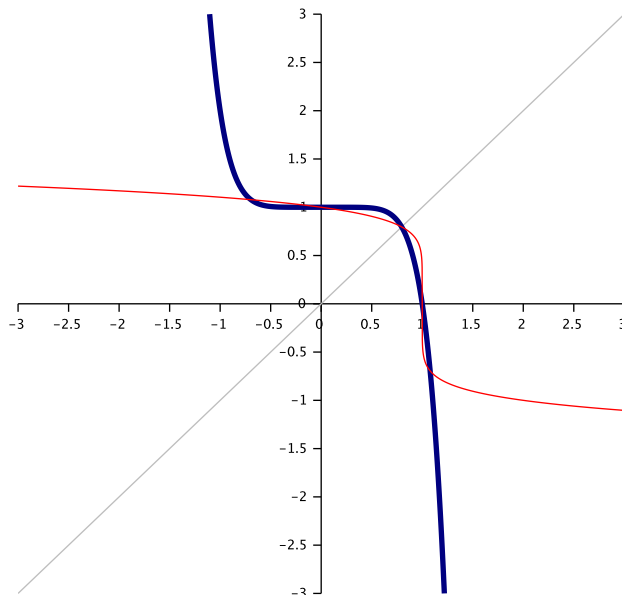
1. (1.5pts) Seja $f(x) = 1 - x^7$.

(a) Determine $f^{-1}(x)$.

$$1 - x^7 = y \Leftrightarrow x^7 = 1 - y \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{1 - y}. \text{ Logo } f^{-1}(x) = \sqrt[7]{1 - x}.$$

(b) Esboce o gráfico de f e de f^{-1} .

Partindo do gráfico de x^7 , fazemos uma reflexão no eixo x para obter o gráfico de $-x^7$ e de seguida deslocamos este último uma unidade para cima, obtendo o gráfico de $1 - x^7$. Nota: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com respeito à reta $y = x$ como em baixo (f a azul espesso).



2. (1.0pts) Sejam $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

(a) Determine $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2} = \frac{\frac{x^2+1}{x}+1}{\frac{x^2+1}{x}+2} = \frac{\frac{x^2+1+x}{x}}{\frac{x^2+1+2x}{x}} = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}.$$

Nota: a última igualdade anterior é válida quando $x \neq 0$.

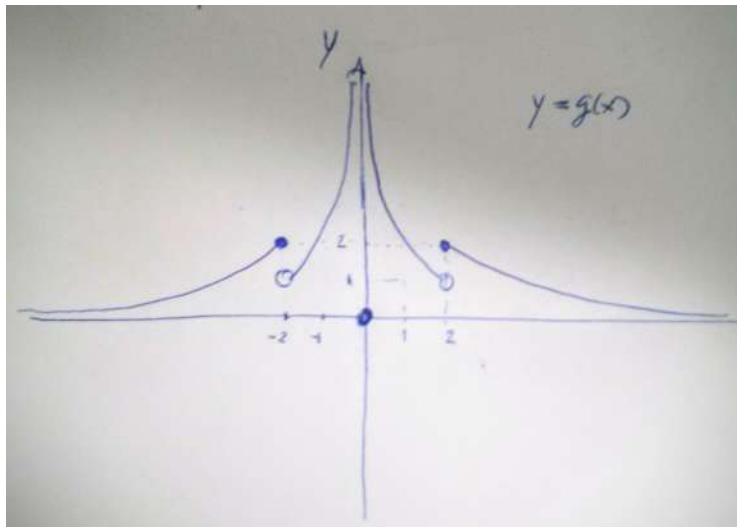
(b) Determine o domínio de $g \circ f$.

Lembre que $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}; x \in D_f \text{ e } f(x) \in D_g\}$. Temos $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$. Temos $f(x) \in D_g \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \neq -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Logo, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

3. (2.0pts) Esboce o gráfico de uma função g que satisfaça todas as seguintes condições:

- (a) g é par;
- (b) g tem domínio $(-\infty, +\infty)$;
- (c) g tem uma descontinuidade por salto em $x = 2$;
- (d) g é contínua à direita de 2;
- (e) $g(2) = 2$;
- (f) $x = 0$ é assíntota vertical de g ;
- (g) g é decrescente no intervalo $(0, 2)$;
- (h) $y = 0$ é assíntota horizontal de g .

Por exemplo:



4. Determine, se existirem:

(a) (1.0pts) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 1}{\sqrt{x^6 + 2}}$

Substituição direta leva-nos à indeterminação ∞/∞ . "Dividindo pela maior potência do denominador",

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 1}{\sqrt{x^6 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2x^3 + 1}{x^3}}{\frac{\sqrt{x^6 + 2}}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + 1/x^3}{\sqrt{1 + 2/x^6}} = \frac{-2 + 0}{1 + 0} = -2.$$

(b) (1.25pts) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x})$

Substituição direta leva-nos à indeterminação $\infty - \infty$. Utilizando o conjugado

$a - b$ na fatoração de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x - \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x - \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x - |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \stackrel{x < 0, |x| = -x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) **(1.25pts)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

Substituição direta leva-nos a uma indeterminação $0/0$. Contudo

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2.$$

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2.$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(d) **(1.0pts)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)(e^x - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)(e^x - 1) = \text{“arctan}\left(\frac{1}{0^+}\right)(e^{0^+} - 1) = \text{arctan}(+\infty) \cdot (1 - 1)\text{”} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0.$$

Outro argumento (“mais rigoroso”): para todo $x > 0$,

$$-\pi/2 < \arctan(1/x) < \pi/2 \quad \text{e} \quad e^x - 1 > 0,$$

logo

$$(e^x - 1)(-\pi/2) < (e^x - 1) \arctan(1/x) < (e^x - 1)\pi/2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)(-\pi/2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)(\pi/2) = 0$, segue, pelo teorema do confronto, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \arctan(1/x) = 0$.

5. **(1pts)** Existe solução da equação $x^7 + x^2 - 1/2 = 0$ no intervalo $[0, 2]$?

Sim. Fazendo $f(x) = x^7 + x^2 - 1/2$, temos $f(0) = -1/2 < 0$ e $f(2) = 2^7 + 2^2 - 1/2 > 0$ e f é contínua em $[0, 2]$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Em particular, existe solução da equação $x^7 + x^2 - 1/2 = 0$ no intervalo $[0, 2]$.