

Gabarito

1. (1.5pts) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$.

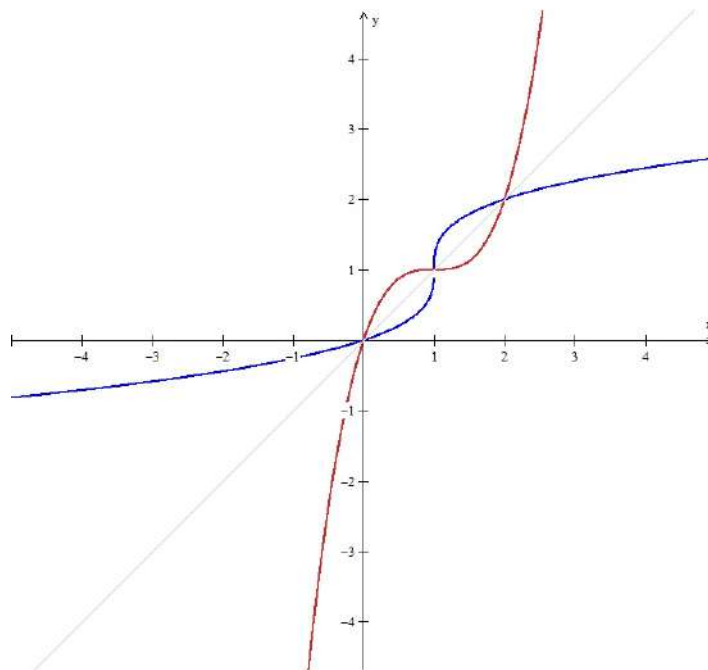
(a) Determine $f^{-1}(x)$.

$$(a) \sqrt[3]{x-1} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = y-1 \Leftrightarrow x-1 = (y-1)^3 \Leftrightarrow x = (y-1)^3 + 1.$$

Logo $f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 1$.

(b) Esboce o gráfico de f e de f^{-1} .

(b) O gráfico de f é obtido do gráfico de $\sqrt[3]{x}$ deslocando-o para direita uma unidade e depois para cima por uma unidade. Nota: $f(0) = 0$. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com respeito à reta $y = x$ como em baixo (f a azul).



2. (1.0 pts) Sejam $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

(a) Determine $(f \circ g)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)^2 + 1}{g(x)} = \frac{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 1}{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\frac{(x+1)^2 + (x+2)^2}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{(x+1)(x+2)}.$$

(b) Determine, justificando, o domínio de $f \circ g$.

Lembre que

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}; x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\}.$$

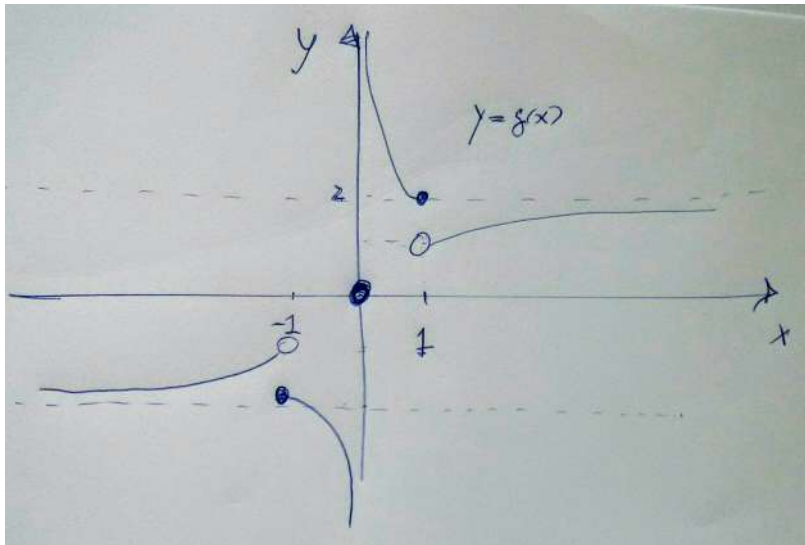
Temos $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq -2$.

Temos $g(x) \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Logo,

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

3. (2.0pts) Esboce o gráfico de uma função g que satisfaça todas as seguintes condições:

- (a) g é ímpar;
- (b) g tem domínio $(-\infty, +\infty)$;
- (c) $x = 0$ é assíntota vertical de g ;
- (d) g é decrescente no intervalo $(0, 1)$;
- (e) $g(1) = 2$;
- (f) g é contínua à esquerda de 1;
- (g) g tem uma descontinuidade por salto em $x = 1$;
- (h) $y = 2$ é assíntota horizontal de g .



4. Determine, se existirem:

(a) (1.0pts) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

“Dividindo pela maior potência de x do denominador”:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 - 3x^2 + x)/x^3}{(x^3 - x + 2)/x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3/x + 1/x^2}{1 - 1/x + 2/x} \\ &= \frac{+\infty - 0 + 0}{1 - 0 + 0} \\ &= +\infty \text{ (não existe)}. \end{aligned}$$

(b) **(1.25pts)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 3})$

Utilizando o conjugado $a - b$ na fatoração de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 3}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 3}) \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - 3}}{x^2 + \sqrt{x^4 - 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - (x^4 - 3)}{x^2 + \sqrt{x^4 - 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + \sqrt{x^4 - 3}} \\ &= \frac{3}{+\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) **(1.25pts)** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$

Substituição direta leva-nos a uma indeterminação $0/0$. Contudo

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

e $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ donde

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5.$$

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 3) = -5.$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(d) **(1.0pts)** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \ln x$.

Para todo $x > 1$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad \ln x > 0,$$

logo

$$-\ln x \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \ln x \leq \ln x.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} -\ln x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$, segue, pelo teorema do confronto, que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \ln x = 0$.

5. **(1.0pts)** Considere um número real c e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x, & x \leq 2 \\ x^3 - cx, & x > 2. \end{cases}$$

Determine o valor de c de modo a que f seja contínua em toda a reta real.

Basta determinar c tal que f seja contínua para $x = 2$, pois para $x \neq 2$, f é polinomial. Como

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} cx^2 + 2x = 4c + 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 - cx = 8 - 2c,$$

concluimos que f é contínua para $x = 2$ se e só se $4c + 4 = 8 - 2c$, i.e., $c = 2/3$.