MAT09570 – CÁLCULO I – 2018/1

Primeira prova parcial – turmas da manhã – 20/04/2018

1. **Considere $f(x) = 2 - \ln(x+1)$.**
   - **(a) Determine o domínio e esboce o gráfico de f. Obtenha também os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.**
   - **(b) Calcule $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)$**
   - **(c) Encontre uma expressão para a função inversa de f.**
   - **(d) Determine funções g, h, p tais que $f(x) = g\Big(h\big(p(x)\big)\Big)$.**

<u>Solução</u>: Temos, $f(x) = 2 - \ln(x+1)$, logo:

(a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, \infty[$.

Interseções com os eixos coordenados:

- $x = 0 \implies y = f(0) = 2 - \ln(0+1) = 2$. Logo, $Graf(f) \cap Oy = \{(0,2)\}$
- $y = 0 \implies 0 = 2 - \ln(x+1) \implies \ln(x+1) = 2 \implies e^{\ln(x+1)} = e^2 \implies x + 1 = e^2 \implies x = e^2 - 1$. Logo, $Graf(f) \cap Ox = \{(e^2 - 1, 0)\}$

(b) Temos:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} [2 - \ln(x+1)] = \lim_{x\to -1^+} 2 - \lim_{x\to -1^+} [\ln(x+1)] =$$
$$= 2 + \ln \lim_{x\to -1^+} (x+1) = 2 - \infty = -\infty$$

Portanto, $\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} [2 - \ln(x+1)] = \lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} [\ln(x+1)] =$$
$$= 2 + \ln \lim_{x\to\infty} (x+1) = 2 + \infty = \infty$$

Portanto, $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}$

(c) Temos:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \ln x & \Leftarrow inversa \Rightarrow & f(x) = e^x \\ f(x) = \ln(x+1) & \Leftarrow inversa \Rightarrow & f(x) = e^x - 1 \\ f(x) = 2 - \ln(x+1) & \Leftarrow inversa \Rightarrow & f(x) = e^{2-x} - 1 \end{array}$$

Cálculo de f^{-1}:

$$y = 2 - \ln(x+1) \underbrace{\implies}_{x \leftrightarrow y} x = 2 - \ln(y+1) \implies \ln(y+1) = 2 - x \implies e^{\ln(y+1)} = e^{2-x}$$
$$\implies y + 1 = e^{2-x} \implies y = e^{2-x} - 1$$

Portanto, $\boxed{f(x) = 2 - \ln(x+1) \implies f^{-1}(x) = e^{2-x} - 1}$.

Observe que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = f(e^{2-x} - 1) = 2 - \ln[(e^{2-x} - 1) + 1] =$$
$$= 2 - \ln e^{2-x} = 2 - (2 - x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(2 - \ln(x+1)) = e^{2-(2-\ln(x+1))} - 1 =$$
$$= e^{\ln(x+1)} - 1 = (x+1) - 1 = x$$

Assim, vemos que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, comprovando que realmente $f^{-1}(x) = e^{2-x} - 1$ é a inversa de $f(x) = 2 - \ln(x+1)$.

$$\boxed{D(f^{-1}) = \mathbb{R}}$$

(d) Tomando: $p(x) = x + 1$, $h(x) = \ln x$ e $g(x) = 2 - x$, temos:

$$(g \circ h \circ p)(x) = g\Big(h\big(p(x)\big)\Big) = g\big(h(x+1)\big) = g(\ln(x+1)) = 2 - \ln(x+1) = f(x).$$

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 8/\sqrt{x}$ no ponto $(1, 8)$.

<u>Solução</u>: A reta tangente r procurada passa pelo ponto $(1, 8)$, possui inclinação m_r e tem equação dada por:

$$\boxed{r: y - 8 = m_r \cdot (x - 1)}$$

Assim, para determinarmos uma equação da reta tangente r, precisamos encontrar a inclinação m_r.

Cálculo de m_r: Temos então que:

$$m_r = f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{8}{\sqrt{1+h}} - 8}{h} = 8 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+h}}{h\big(\sqrt{1+h}\big)}$$

$$= 8 \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1+h}}{h\big(\sqrt{1+h}\big)} \cdot \frac{1 + \sqrt{1+h}}{1 + \sqrt{1+h}} \right) = 8 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 - (1+h)}{h\big(\sqrt{1+h}\big)\big(1 + \sqrt{1+h}\big)}$$

$$= 8 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\big(\sqrt{1+h}\big)\big(1 + \sqrt{1+h}\big)} = -8 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\big(\sqrt{1+h}\big)\big(1 + \sqrt{1+h}\big)} = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4.$$

Assim temos $\boxed{m_r = -4}$ e então:

$$r: y - 8 = (-4) \cdot (x - 1) \Longrightarrow r: y = -4\,x + 12 \Longrightarrow \boxed{r: 4\,x + y - 12 = 0}$$

3. Calcule os limites a seguir, se existirem, ou justifique a não existência.

$$(\boldsymbol{a}) \ \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{x-2} \quad (\boldsymbol{b}) \ \lim_{x\to\infty} \frac{sen^2\,(\ln x)}{x} \quad (\boldsymbol{c}) \ \lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right)$$

<u>Solução</u>: Temos que:

(a) Calculando os limites laterais:

Inicialmente observamos que:

- $x \to 2^- \Longrightarrow x - 2 \to 0^-$.
- $x \to 2^+ \Longrightarrow x - 2 \to 0^+$.
- $x \to 2 \Longrightarrow e^{x-2} \to e^0 = 1$.

Assim temos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x-2}}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Conclusão, NÃO existe $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{x-2}$ pois seus limites laterais não existem.

(b) Façamos $t = \ln x$. Assim, $x = e^t$ e $x \to \infty \Longrightarrow t \to \infty$. Assim, podemos reescrever:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sen^2\,(\ln x)}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{sen^2\,t}{e^t}.$$

Observamos aqui que NÃO podemos fazer:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{sen^2\,t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} (sen^2\,t) \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t}$$

pois, $\lim_{t\to\infty}(sen^2\, t)$ não existe.

Vamos então calcular este limite usando o Teorema do Confronto:

Visto que $e^{-t} = 1/e^t$, $e^{-t} > 0$ para todo t real, temos:

$$0 \le sen^2\, t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e^t}\cdot 0 \le \frac{1}{e^t}\cdot sen^2\, t \le \frac{1}{e^t}\cdot 1 \Rightarrow 0 \le \frac{sen^2\, t}{e^t} \le \frac{1}{e^t}.$$

Agora, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} 0 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0.$$

Logo,

$$0 \le \frac{sen^2\, t}{e^t} \le \frac{1}{e^t}, \lim_{t\to\infty} 0 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{Teorema\ do\ Confronto} \boxed{\lim_{t\to\infty}\frac{sen^2\, t}{e^t} = 0}$$

(c) Temos que $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$ é um limite do tipo $(\infty - \infty)$.

Assim, NÃO podemos fazer:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) + \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x}$$

Façamos então:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-4x)}{x-\sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x-\sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1-\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}} \underbrace{=}_{*} \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1-\frac{\sqrt{x^2-4x}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{x^2-4x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Portanto, $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = 2}$.

*Observe que neste problema, substituímos no denominador x por $-\sqrt{x^2}$. A razão desta substituição é que:

$$x\to-\infty \Rightarrow x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x \Rightarrow x = -|x| = -\sqrt{x^2}.$$

4. Considere

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-1}, & se\ x \ne 1 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}}$$

Determine se f é contínua em $x = 1$. Justifique.

<u>Solução</u>: Temos que $f(1) = 1$. Assim, f será contínua em $x = 1$ se, e somente se,

$$\boxed{\lim_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)}$$

Inicialmente, observamos que:

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3).$$

Logo, para todo $x\in(1-\delta, 1)$, isto é, $x<1$ mas bem próximo de 1, temos $(x-1)<0$, $(x-3)<0$ e $x^2-4x+3>0$.

Também, para todo $x \in (1, 1+\delta)$, isto é, $1 < x < 3$, mas bem próximo de 1, temos $(x-1) > 0$, $(x-3) < 0$ e $x^2 - 4x + 3 < 0$.
Se $x > 3$, temos $x^2 - 4x + 3 > 0$.
Daí, podemos reescrever:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & se\ x < 1 \\ 1, & se\ x = 1 \\ -\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & se\ 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & se\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-3, & se\ x < 1 \\ 1, & se\ x = 1 \\ -x+3, & se\ 1 < x < 3 \\ x-3, & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

Assim, temos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-3) = -2$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, concluímos que <u>NÃO</u> existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ e consequentemente, f <u>NÃO</u> é contínua em $x = 1$.

5. Mostre que existe um número real c que é solução da equação $x^2 - 1000 = 10\cos x$.

<u>Solução 1</u>: Considere a função $f(x) = x^2 - 10\cos x - 1000$.
Inicialmente, observamos que f é contínua em toda a reta real ($D(f) = \mathbb{R}$).
Assim, temos que existe um número real c que é solução da equação $x^2 - 1000 = 10\cos x$ se, e somente se, a função f possuir um zero.
Temos:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -10 \leq -10\cos x \leq 10 \Rightarrow x^2 - 10 \leq x^2 - 10\cos x \leq x^2 + 10$$
$$\Rightarrow x^2 - 10 - 1000 \leq x^2 - 10\cos x - 1000 \leq x^2 + 10 - 1000$$
$$\Rightarrow x^2 - 1010 \leq x^2 - 10\cos x - 1000 \leq x^2 - 990$$

Logo, considerando $g(x) = x^2 - 1010$ e $h(x) = x^2 - 990$, vemos que f, g e h são funções contínuas em toda a reta real, $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ e como existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 = 1010$ e $b^2 = 990$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.
Portanto, existe um número real c que é solução da equação $x^2 - 1000 = 10\cos x$.

<u>Solução 2</u>: Considere a função $f(x) = x^2 - 10\cos x - 1000$.
Inicialmente, observamos que f é contínua em toda a reta real ($D(f) = \mathbb{R}$).
Assim, temos que existe um número real c que é solução da equação $x^2 - 1000 = 10\cos x$ se, e somente se, a função f possuir um zero.
Temos:

$$f(0) = 0^2 - 10\cos(0) - 1000 = -1010 < 0$$
$$f(32) = 32^2 - 10\cos(32) - 1000 = 24 - 10\underbrace{\cos(32)}_{-1 \leq \cos(32) \leq 1} > 0$$

Assim, temos que f é contínua em $[0, 32]$ e que $f(0) < 0 < f(32)$, então pelo Teorema do Confronto, temos que existe um número real $c \in (0, 32)$ tal que $f(c) = 0$.
Portanto, podemos afirmar que existe um número real c que é solução da equação $x^2 - 1000 = 10\cos x$.