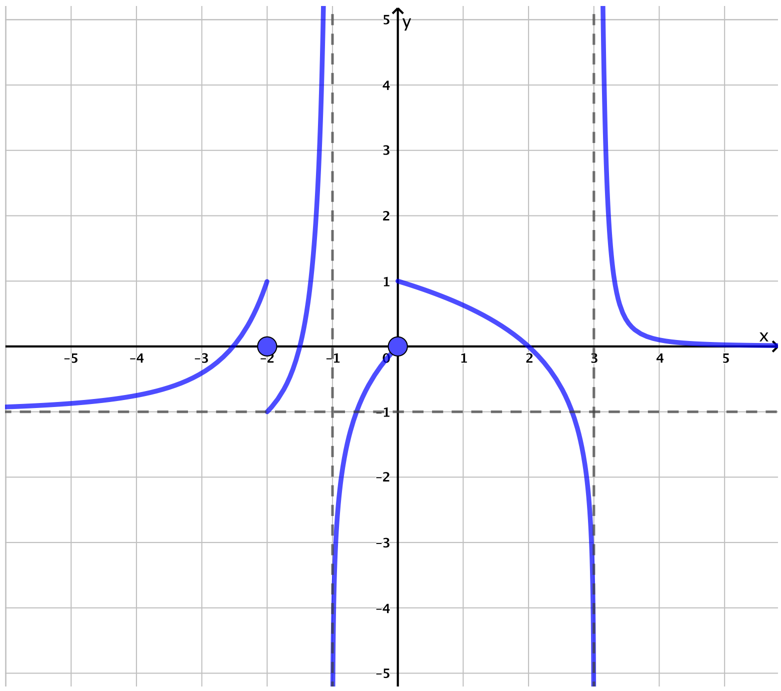
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 30/09/20 (manhã)

Gabarito

1. (2,0) Observe o gráfico da função f.



Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

i) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

Falso, pois $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to -2^+} f(x)$.

ii) $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

Falso, pois $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \to -1^-} f(x)$.

iii) $\lim_{x \to -2^-} f(x) + \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

Verdadeiro, pois $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1, \lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$ e $f(2) = 0$.

iv) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Falso, pois $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

v) f é contínua em $x = 0$

Falso, pois $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to0^+} f(x)$.

2. (2,0) Sejam $a > 0$, $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \ln(x-a)$

(a) Determine $f(g(x))$ e o domínio de $f \circ g$.

$$f(g(x)) = f(\ln(x-a)) = \ln(\ln(x-a))$$

Para $f \circ g$ estar bem definido devemos ter:
$x - a > 0 \Rightarrow x > a$ e
$\ln(x-a) > 0 \Rightarrow x - a > e^0 = 1 \Rightarrow x > 1 + a$
Portanto, Dom $f \circ g = (1 + a, \infty)$.

(b) Determine todos os números x tais que $f(g(x)) = 0$.

$$\begin{aligned} f(g(x)) = 0 &\Rightarrow \ln(\ln(x-a)) = 0 \\ &\Rightarrow \ln(x-a) = e^0 = 1 \\ &\Rightarrow x - a = e^1 \\ &\Rightarrow x = a + e. \end{aligned}$$

3. (4,0) Calcule, se existirem:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6}\right)$

Temos

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2}$$

Portanto, $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6}\right) = \lim_{x\to3}\frac{1}{x-2} = 1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{ax^2-9}}{bx-6} \quad (a > 0, b \neq 0)$

Como $x \to -\infty$, temos $x < 0$ e $\sqrt{x^2} = |x| = -x \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{ax^2-9}}{bx-6} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{ax^2-9}}{x}}{\frac{bx-6}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{ax^2-9}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{bx-6}{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{\frac{ax^2-9}{x^2}}}{\frac{bx-6}{x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{a - \frac{9}{x^2}}}{b - \frac{6}{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{a-0}}{b-0} = -\frac{\sqrt{a}}{b} \end{aligned}$$

4. (2,0) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e as assíntotas verticais ao gráfico da função
$$f(x) = 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x}$$

Vamos determinar inicialmente se existem assíntotas horizontais, ou seja se existem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x}.$$

No caso de $x \to \infty$, temos $x > 0$ e então

$$-1 \leq \cos(100 \cdot x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1000}{x} \leq 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} \leq \frac{1000}{x}.$$

Como $\lim_{x\to\infty}(-\frac{1000}{x}) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1000}{x}) = 0$, o Teorema do Confronto nos assegura que

$$\lim_{x\to\infty} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} = 0.$$

Logo, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

No caso de $x \to -\infty$, segue que $x < 0$ e assim

$$-1 \leq \cos(100 \cdot x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1000}{x} \geq 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} \geq \frac{1000}{x}.$$

Como $\lim_{x\to-\infty}(-\frac{1000}{x}) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{1000}{x}) = 0$, o Teorema do Confronto nos assegura que

$$\lim_{x\to-\infty} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ é a <u>única</u> assíntota horizontal.

Vamos determinar agora as assíntotas verticais. Se existir assíntota vertical terá que ser $x = 0$, pois f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} \overset{\frac{1000\cdot1}{0^+}}{=} +\infty$$

Assim, a reta $x = 0$ é a <u>única</u> assíntota vertical.

Nota: alternativamente, poderíamos ter concluído que $x = 0$ é assíntota vertical pelo limite à esquerda

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 1000 \cdot \frac{\cos(100 \cdot x)}{x} \overset{\frac{1000\cdot1}{0^-}}{=} -\infty$$