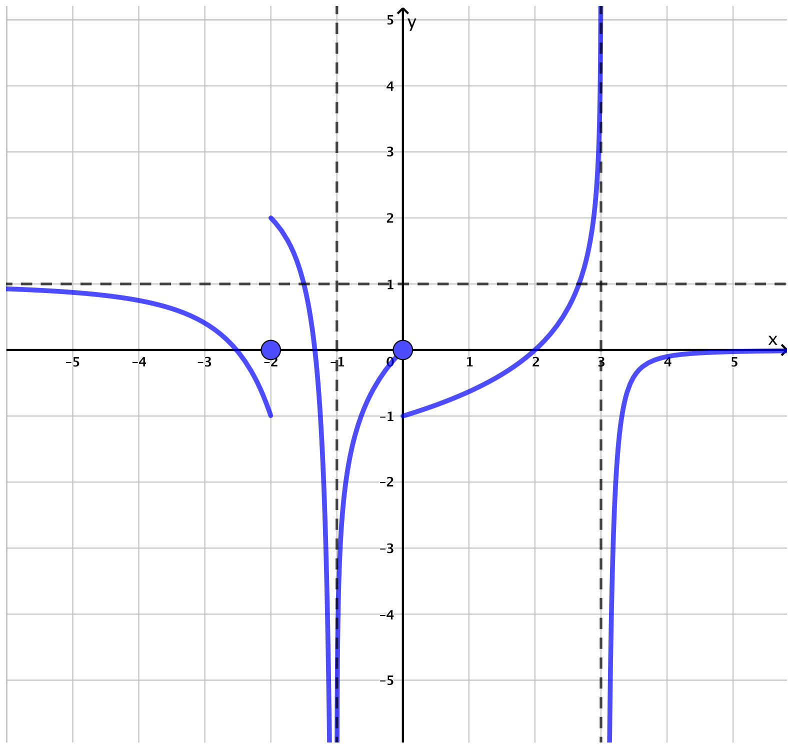
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 30/09/20 (tarde)

Gabarito.

1. (2,0) Observe o gráfico da função f.



Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

i) f é descontínua em $x = 0$

ii) $\lim_{x\to -2^-} f(x) + \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

iii) $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$

iv) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

v) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

(i) Verdadeira, pois $-1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0) = 0$

(ii) Falsa, pois $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1, \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, -1 + 2 = 1 \neq 0 = f(0)$

(iii) Falsa, pois $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

(iv) Falsa, pois $-1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

(v) Falsa, pois $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

2. (2,0) Sejam $a > 0$, $f(x) =$ arcsen x e $g(x) = -\ln(x - a) + 1$.

(a) Determine $f(g(x))$ e o domínio de $f \circ g$.

A expressão fica $f(g(x)) = \text{ arcsen } g(x) = \text{ arcsen } (-\ln(x-a)+1)$.
Como a função arcsen tem domínio $[-1,1]$ e a função ln tem domínio $(0,\infty)$, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto dos números reais x que satisfazem as condições

$$x - a > 0 \quad \text{ e } \quad -1 \leq -\ln(x-a)+1 \leq 1.$$

De $x - a > 0$, concluímos que $x > a$.
De $-1 \leq -\ln(x-a)+1 \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
-1 \leq -\ln(x-a)+1 &\leq 1 \\
-2 \leq -\ln(x-a) &\leq 0 \\
2 \geq \ln(x-a) &\geq 0 \\
e^2 \geq e^{\ln(x-a)} &\geq e^0 \\
e^2 \geq x-a &\geq 1 \\
e^2 + a \geq x &\geq 1+a \\
1 + a \leq x &\leq e^2 + a
\end{aligned}$$

Temos $1 + a > a$ donde

$$x > a \quad \text{ e } \quad 1 + a \leq x \leq e^2 + a$$

equivale a $1 + a \leq x \leq e^2 + a$. Em forma de intervalo a resposta pretendida é

$$[1+a, e^2+a].$$

(b) Determine todos os números x tais que $f(g(x)) = 0$.

Resolvendo

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= 0 \\
\text{arcsen } (-\ln(x-a)+1) &= 0 \\
-\ln(x-a)+1 &= 0 \\
\ln(x-a) &= 1 \\
x - a &= e^1 \\
x &= e + a
\end{aligned}$$

Nota: $e + a$ está no domínio acima.

3. (4,0) Calcule, se existirem:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

(Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$)
Quando $x \to -\infty$, temos $x < 0$, $|x| = -x$ e

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = \frac{\sqrt{x^2(1-9/x^2)}}{x(2-6/x)} = \frac{|x|\sqrt{1-9/x^2}}{x(2-6/x)} = \frac{-x\sqrt{1-9/x^2}}{x(2-6/x)} = -\frac{\sqrt{1-9/x^2}}{2-6/x} \to -\frac{\sqrt{1-0}}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2-a}{(x-a)(x-2)}\right)$, onde $a\neq 2$.

(Nos limite laterais temos forma indeterminada $\infty-\infty$)

Quando $x\to a$, por valores diferentes de a:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{2-a}{(x-a)(x-2)}=\frac{x-2+2-a}{(x-a)(x-2)}=\frac{x-a}{(x-a)(x-2)}=\frac{1}{x-2}\to\frac{1}{a-2}.$$

4. (2,0) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x)=\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}.$$

Vamos determinar inicialmente se existem assíntotas horizontais, ou seja se existem:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}.$$

No caso $x\to\infty$, temos $x>0$ e então

$$\begin{aligned}-1\leq\ \mathrm{sen}\ x\leq 1 &\Rightarrow -1000\leq 1000\ \mathrm{sen}\ x\leq 1000\\ &\Rightarrow -999\leq 1+1000\ \mathrm{sen}\ x\leq 1001 \quad\Rightarrow\frac{-999}{x}\leq\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ x}{x}\leq\frac{1001}{x}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to\infty}-\frac{999}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1001}{x}=0$, o Teorema do Confronto nos assegura que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}=0.$$

Logo, a reta $y=0$ é a uma assíntota horizontal.

No caso $x\to-\infty$, temos $x<0$ e então

$$\begin{aligned}-1\leq\ \mathrm{sen}\ x\leq 1 &\Rightarrow -1000\leq 1000\ \mathrm{sen}\ x\leq 1000\\ &\Rightarrow -999\leq 1+1000\ \mathrm{sen}\ x\leq 1001 \quad\Rightarrow\frac{-999}{x}\geq\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ x}{x}\geq\frac{1001}{x}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to\infty}-\frac{999}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1001}{x}=0$, o Teorema do Confronto nos assegura que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}=0.$$

Portanto, a reta $y=0$ é a <u>única</u> assíntota horizontal.

Vamos determinar agora as assíntotas verticais. Se existir assíntota vertical terá que ser $x=0$, pois f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Vamos analisar o limite lateral à direita, por exemplo:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+1000\ \mathrm{sen}\ (x)}{x}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty.$$

Assim, a reta $x = 0$ é a única assíntota vertical.

Nota: alternativamente, poderíamos ter concluído que $x = 0$ é assíntota vertical pelo limite à esquerda

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + 1000 \text{ sen } (x)}{x} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty.$$