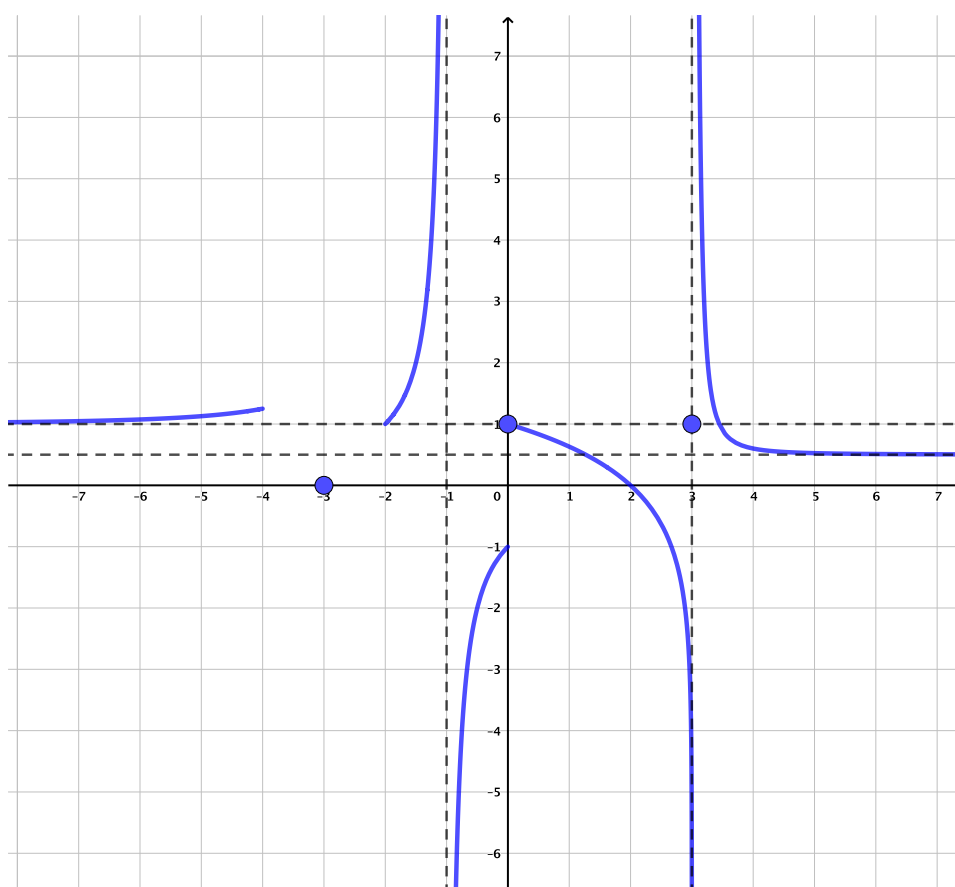


Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 30/10/20 (2ª chamada)

1. (2,0) Observe o gráfico da função f .



Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

[0,2]

Verdadeiro, de fato $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

ii) As curvas $y = 0$ e $y = f(x)$ interseam-se num único ponto.

[0,2]

Falso, a interseção das curvas ocorre nos pontos de abscissa x em que $f(x) = 0$ (zeros de f), isto é, $(-3, 0)$, $(2, 0)$ são os dois pontos de interseção, pois $f(-3) = f(2) = 0$.

iii) $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f

[0,2]

Falso, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

iv) A reta $x = 3$ não é assíntota vertical, pois $f(3) = 1$.

[0,2]

Falso, pois $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, donde $x = 3$ é assíntota vertical.

v) f é contínua em $x = 3$

[0,2]

Falso, pois $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$.

2. (1,0) Sejam $a > 0$, $f(x) = \ln(x - a)$ e $g(x) = e^x$

(a) Determine $f(g(x))$ e o domínio de $f \circ g$.

[0,5]

$$f(g(x)) = f(e^x) = \ln(e^x - a)$$

Para $f \circ g$ estar bem definido devemos ter:

$$e^x - a > 0 \Rightarrow e^x > a \Rightarrow x > \ln a$$

Portanto, $Dom f \circ g = (\ln a, \infty)$

(b) Determine todos os números x tais que $f(g(x)) = 0$.

[0,5]

$$\begin{aligned} f(g(x)) = 0 &\Rightarrow \ln(e^x - a) = 0 \\ &\Rightarrow e^x - a = e^0 = 1 \\ &\Rightarrow e^x = 1 + a \\ &\Rightarrow x = \ln(1 + a) \end{aligned}$$

Note que

$$0 < 1 \Rightarrow a < 1 + a \Rightarrow \ln a < \ln(1 + a)$$

Portanto, $x = \ln(1 + a)$ está no $Dom f \circ g$.

3. (2,0) Determine os limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

[1,0]

(Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.)

Colocando em evidência o termo dominante e^x

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - a^2}{|x^2 - 2ax + a^2|}$, $a < 0$.

[1,0]

(Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.)

Note que $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \geq 0$, e $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, donde

$$\frac{x^2 - a^2}{|x^2 - 2ax + a^2|} = \frac{(x - a)(x + a)}{|(x - a)^2|} = \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)^2} = \frac{x + a}{x - a} \underset{x \rightarrow a^+}{\rightarrow} \underbrace{0^+}_{a < 0} \underset{a < 0}{=} -\infty.$$

4. (5,0) Seja a um número real e considere

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) + a, & x < 0 \\ \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} + e, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

[1,0+1,0]

Queremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} + e.$$

Note que para todo $x > 0$,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(ax) \leq 1 \\ -2 &\leq \cos(ax) - 1 \leq 0 \\ -\frac{2}{x^2} &\leq \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} \leq 0 \\ -\frac{2}{x^2} + e &\leq \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} + e \leq e. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} + e = e = \lim_{x \rightarrow 0} e$, o Teorema do Confronto garante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} = e.$$

Agora, por continuidade da função arctg :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) + a = \operatorname{arctg} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right) + a = \operatorname{arctg} 0 + a = a.$$

(b) Determine $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Dica: se conveniente, pode usar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} = -\frac{a^2}{2}$.

[0,5+1,0]

Por um lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} + e \underset{\text{Dica}}{=} -\frac{a^2}{2} + e.$$

E, por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) + a = \operatorname{arctg} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \right) + a = \operatorname{arctg} (-\infty) + a = -\frac{\pi}{2} + a.$$

(c) Justifique se existem assíntotas horizontais ou assíntotas verticais ao gráfico da função f .

[1,0+0,5]

Por (b), os limites laterais em zero são finitos, logo não existe assíntota vertical em zero. Nos restantes números reais a função é contínua, não tendo, portanto, quaisquer assíntotas verticais.

Por (a), concluímos que existem as assíntotas horizontais $y = a$ e $y = e$.