Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 11/11/20 (manhã)

1. (3,5) Determine:

   (a) a equação da reta tangente à curva $x^2 - 2y^2 = y$ no ponto $(1, 1/2)$

[1,0]
A equação da reta tangente será $y - 1/2 = m(x-1)$, em que $m = y'(1)$ que obtemos derivando implicitamente:

$$\begin{aligned} 2x - 4yy' = y' &\Rightarrow y'(1+4y) = 2x \\ &\Rightarrow y' = \frac{2x}{1+4y}. \end{aligned}$$

Para $y = 1/2$, $x = 1$, temos $m = 2/3$. Portanto a equação da reta fica sendo

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(x-1) &\Rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

   (b) $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$, sabendo que $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(\frac{x+1}{x+2})$

[1,0]
Aplicando as regras de derivação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(g(x))] &= f'(g(x))g'(x) \\ &= e^{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} . \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \\ &= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1\cdot(x+2) - (x+1)\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi x - 1}{\pi x - 2}\right)^{x+3}$

[1,5]
(Forma indeterminada 1^∞)
Solução 1 (limite fundamental): note que

$$\frac{\pi x-1}{\pi x-2}=\frac{\pi x-2+1}{\pi x-2}=1+\frac{1}{\pi x-2}$$

donde

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)^{x+3}&=\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{x+3}\\&=\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{(\pi x-2)\cdot\frac{x+3}{\pi x-2}}\\&=\left[\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{(\pi x-2)}\right]^{\frac{x+3}{\pi x-2}}.\end{aligned}$$

Temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\pi x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3/x}{\pi-2/x}=\frac{1}{\pi}$$

e $x\to\infty\Leftrightarrow y=\pi x-2\to\infty$ donde

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{(\pi x-2)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

Assim, quando $x\to\infty$, temos

$$\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)^{x+3}=\left[\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{(\pi x-2)}\right]^{\frac{x+3}{\pi x-2}}=e^{\frac{x+3}{\pi x-2}\ln\left[\left(1+\frac{1}{\pi x-2}\right)^{(\pi x-2)}\right]}\longrightarrow e^{\frac{1}{\pi}\ln e}=e^{\frac{1}{\pi}}.$$

Solução 2 (L'Hospital):

$$y=\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)^{x+3}\Rightarrow\ln y=(x+3)\cdot\ln\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y&=\lim_{x\to\infty}(x+3)\cdot\ln\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)\ (\infty\cdot 0)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)}{\frac{1}{x+3}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi x-2}{\pi x-1}\cdot\frac{\pi(\pi x-2)-(\pi x-1)\pi}{(\pi x-2)^2}}{-\frac{1}{(x+3)^2}}\\&=\lim_{x\to\infty}-\frac{\pi x-2}{\pi x-1}\cdot\frac{-\pi}{(\pi x-2)^2}\cdot(x+3)^2\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x^2+6x+3)}{(\pi x-1)(\pi x-2)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2})}{(\pi-\frac{1}{x})(\pi-\frac{2}{x})}\\&=\frac{\pi}{\pi\cdot\pi}=\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi x-1}{\pi x-2}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^{\lim_{y\to\infty}\ln y}=e^{\frac{1}{\pi}}.$$

2. (3,5) Acerca da função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, indique, justificando:

(a) se existem assíntotas horizontais/verticais

[0,5]
A função é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto não tem assíntotas verticais.

Temos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\infty} = 0$, portanto a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal.

(b) intervalos onde é crescente/decrescente, e existência de máximos/mínimos locais

[1,0]
Derivando

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Note que o sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal de $-x$, pois restante fator é positivo, portanto $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$ e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Pelo Teste C/D, concluímos que f é crescente para $x < 0$ e decrescente para $x > 0$.

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluímos que $f(0) = 1$ é máximo (global) e não existem outros extremos (pois $x = 0$ é o único zero da derivada).

(c) intervalos onde tem concavidade voltada para baixo/cima e existência de pontos de inflexão

[1,5]
Derivando

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= (-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} - x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) \quad \text{(por (b))} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}(-1 + x^2) \end{aligned}$$

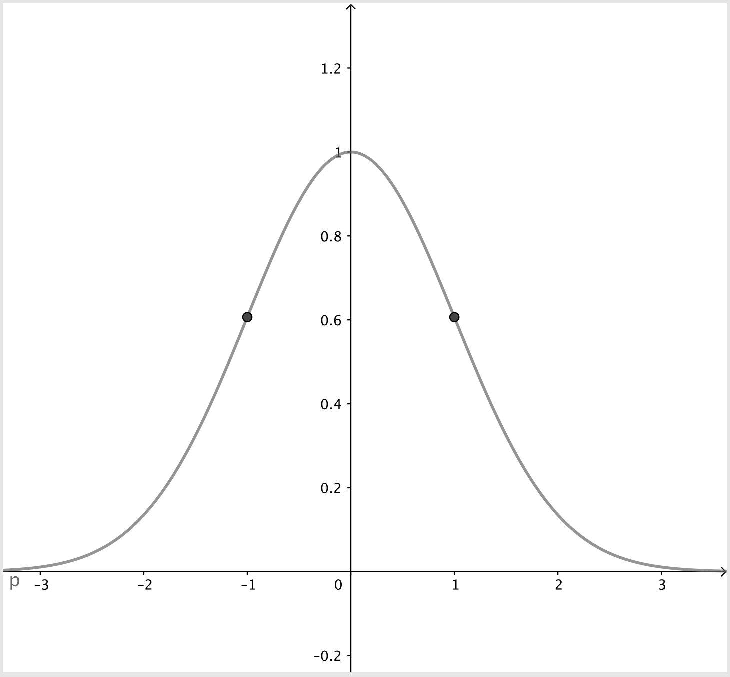
e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Note que o sinal de $f''(x)$ é igual ao sinal de $x^2 - 1$, pois o restante fator é positivo, portanto $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$ e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

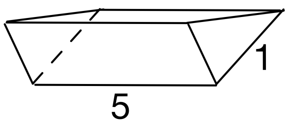
Pelo Teste da Concavidade, concluímos que f tem concavidade para cima para $x < -1$ e para $x > 1$ e tem concavidade para baixo para $-1 < x < 1$; além disso, os pontos de inflexão são $(1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$ e $(-1, f(-1)) = (-1, e^{-1/2})$.

(d) um esboço do gráfico.

[0,5]



3. (2,0) Um cocho (veja figura) tem 5m de comprimento com extremidades em forma de triângulo equilátero com lado 1m. Se o cocho recebe água a uma taxa de 2 m^3/min, quão rápido o nível da água está subindo no instante em que está com 20cm de profundidade?



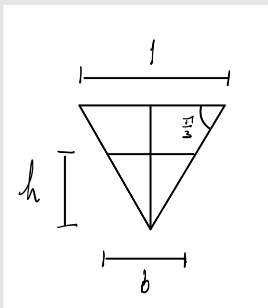
Sejam

h : o nível de água em metros em cada instante (em minutos)

V : o volume de água em cada instante (em minutos).

Temos $\frac{dV}{dt} = 2$ e queremos $\frac{dh}{dt}$ no instante em que $h = 0,2$ (20 cm).

O volume do cocho é dado por $V = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot 5$ em que b é a base do triângulo equilátero na lateral do cocho determinado pelo nível da água (ver figura).



Para o triângulo maior de lado 1 a altura é $1 \cdot \text{sen}\pi/3 = \sqrt{3}/2$ e, por semelhança de triângulos, para o triângulo menor, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}h$, donde

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h \right) \cdot h \cdot 5 \Rightarrow V = \frac{5}{\sqrt{3}}h^2 \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{10h}{\sqrt{3}}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10h}\frac{dV}{dt}.$$

Para $h = 0,2$ e $dV/dt = 2$ temos $\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10\cdot(0,2)} 2 = \sqrt{3}$ (m/min).

4. (1,0) Considere a curva $-y + \operatorname{senh} x = -\cosh x$ no plano xOy.

   (a) A curva pode ser reescrita como $y = e^x$? Justifique, se for verdadeiro, e apresente contra-exemplo, se for falso.

[0,5]

Verdadeiro, pela definição de $\cosh x$ e de $\operatorname{senh} x$:

$$\begin{aligned} -y + \operatorname{senh} x = -\cosh x &\Leftrightarrow y = \operatorname{senh} x + \cosh x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = e^x. \end{aligned}$$

   (b) Prove que existe um ponto (x, y) da curva acima que está mais próximo do ponto $(0, 0)$.

[0,5]

Queremos provar que existe um ponto (x, y) que minimiza a distância entre (x, y) e $(0, 0)$ dada por

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

onde (x, y) está sujeito a $y = e^x$ (por (a)).

Assim, queremos o mínimo global de $d(x) = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lembre que : x minimiza a distância $d(x)$ se e somente se x minimiza $f(x) = d^2(x) = x^2 + e^{2x}$.

Temos $f'(x) = 2x + 2e^{2x}$. Como $f'(0) = 2 > 0$ e $f'(-1) = -2 + \frac{2}{e} < 0$ e f' é contínua em $[-1, 0]$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f'(c) = 0$. Por outro lado, $f''(x) = 2 + 4e^{2x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde f' é estritamente crescente para todo x, c é o único zero de f' e temos $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, $f'(x) > 0$ para todo $x > c$. Assim, $f(c)$ é mínimo global de f (Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos).

Conclusão: o ponto (c, e^c) é o ponto da curva mais próximo de $(0, 0)$.