3.4 A Regra da Cadeia

1. Considere a função $F(x) = f(x^2 \cos(\pi x))$. Sabendo que $f'(-1) = \pi$, $f'(0) = 6$ e $f'(1) = 3\pi$, determine $F'(-1)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$F'(x) = f'(x^2 \cos(\pi x)) \cdot \left[2x \cos(\pi x) - \pi x^2 \operatorname{sen}(\pi x)\right],$$

logo

$$F'(-1) = f'(1 \cdot (-1)) \cdot [2 \cdot (-1) \cdot (-1) - \pi \cdot 1 \cdot 0] = 2 \cdot f'(-1) = 2\pi$$

2. Considere a função $F(x) = f(x^2 \cos(-\pi x))$. Sabendo que $f'(-1) = \pi$, $f'(0) = 6$ e $f'(1) = 3\pi$, determine $F'(1)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$F'(x) = f'(x^2 \cos(-\pi x)) \cdot \left[2x \cos(-\pi x) + \pi x^2 \operatorname{sen}(-\pi x)\right],$$

logo

$$F'(1) = f'(1 \cdot (-1)) \cdot [2 \cdot 1 \cdot (-1) + \pi \cdot 1 \cdot 0] = -2 \cdot f'(-1) = -2\pi$$

3. Considere a função $F(x) = f(x^2 \operatorname{sen}(\pi x))$. Sabendo que $f'(-1) = \pi$, $f'(0) = 6$ e $f'(1) = 3\pi$, determine $F'(-1)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$F'(x) = f'(x^2 \operatorname{sen}(\pi x)) \cdot \left[2x \operatorname{sen}(\pi x) + \pi x^2 \cos(\pi x)\right],$$

logo

$$F'(-1) = f'(1 \cdot 0) \cdot [2 \cdot (-1) \cdot 0 + \pi \cdot 1 \cdot (-1)] = -\pi \cdot f'(0) = -6\pi$$

4. Considere a função $F(x) = f(x^2 \operatorname{sen}(-\pi x))$. Sabendo que $f'(-1) = \pi$, $f'(0) = 6$ e $f'(1) = 3\pi$, determine $F'(1)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$F'(x) = f'(x^2 \operatorname{sen}(-\pi x)) \cdot \left[2x \operatorname{sen}(-\pi x) - \pi x^2 \cos(-\pi x)\right],$$

logo

$$F'(1) = f'(1 \cdot 0) \cdot [2 \cdot 1 \cdot 0 - \pi \cdot 1 \cdot (-1)] = \pi \cdot f'(0) = 6\pi$$

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

1. Sejam a e b constantes com $a < b$. Determine o(s) intervalo(s) onde f é crescente e o(s) intervalo(s) onde f tem concavidade para cima, sendo:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx + a^2 + b^2$$

Inicialmente, vamos calcular a derivada de f:

$$f'(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Vamos determinar os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = b$$

Estudo do sinal de f':

Intervalo	$(-\infty, a)$	(a, b)	(b, ∞)
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	**crescente**	decrescente	**crescente**

Calculando a derivada segunda de f, temos:

$$f''(x) = 2x - (a+b)$$

Estudo do sinal de f'':

Intervalo	$(-\infty, \frac{a+b}{2})$	$(\frac{a+b}{2}, \infty)$
Sinal de f''	$-$	$+$
Concavidade de f	para baixo	**para cima**

2. Sejam a e b constantes com $a < b$. Determine o(s) intervalo(s) onde f é decrescente e o(s) intervalo(s) onde f tem concavidade para cima, sendo:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx + a^2 + b^2$$

Inicialmente, vamos calcular a derivada de f:

$$f'(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Vamos determinar os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = b$$

Estudo do sinal de f':

Intervalo	$(-\infty, a)$	(a, b)	(b, ∞)
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	crescente	**decrescente**	crescente

Calculando a derivada segunda de f, temos:

$$f''(x) = 2x - (a+b)$$

Estudo do sinal de f'':

Intervalo	$(-\infty, \frac{a+b}{2})$	$(\frac{a+b}{2}, \infty)$
Sinal de f''	$-$	$+$
Concavidade de f	para baixo	**para cima**

3. Sejam a e b constantes com $a < b$. Determine o(s) intervalo(s) onde f é crescente e o(s) intervalo(s) onde f tem concavidade para baixo, sendo:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx + a^2 + b^2$$

Inicialmente, vamos calcular a derivada de f:

$$f'(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Vamos determinar os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = b$$

Estudo do sinal de f':

Intervalo	$(-\infty, a)$	(a, b)	(b, ∞)
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	**crescente**	decrescente	**crescente**

Calculando a derivada segunda de f, temos:

$$f''(x) = 2x - (a+b)$$

Estudo do sinal de f'':

Intervalo	$(-\infty, \frac{a+b}{2})$	$(\frac{a+b}{2}, \infty)$
Sinal de f''	$-$	$+$
Concavidade de f	**para baixo**	para cima

4. Sejam a e b constantes com $a < b$. Determine o(s) intervalo(s) onde f é decrescente e o(s) intervalo(s) onde f tem concavidade para baixo, sendo:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx + a^2 + b^2$$

Inicialmente, vamos calcular a derivada de f:

$$f'(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Vamos determinar os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = b$$

Estudo do sinal de f':

Intervalo	$(-\infty, a)$	(a, b)	(b, ∞)
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	crescente	**decrescente**	crescente

Calculando a derivada segunda de f, temos:

$$f''(x) = 2x - (a + b)$$

Estudo do sinal de f'':

Intervalo	$(-\infty, \frac{a+b}{2})$	$(\frac{a+b}{2}, \infty)$
Sinal de f''	$-$	$+$
Concavidade de f	**para baixo**	para cima

4.4 Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôspital

1. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x$

Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$y=\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x\Rightarrow\ln y=x\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right)}{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+b}{x+a}\cdot\frac{x+b-(x+a)}{(x+b)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to\infty}-x^2\cdot\frac{1}{x+a}\cdot\frac{b-a}{x+b}\\&=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x+a}\cdot\frac{a-b}{x+b}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(a-b)}{x^2+(a+b)x+ab}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}\\&=a-b\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln y}=e^{a-b}$$

2. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-b}\right)^{2x}$

Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{x-b}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$y=\left(\frac{x+a}{x-b}\right)^{2x}\Rightarrow\ln y=2x\ln\left(\frac{x+a}{x-b}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y=2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x-b}\right)}{\frac{1}{x}}&=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-b}{x+a}\cdot\frac{x-b-(x+a)}{(x-b)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=2\lim_{x\to\infty}-x^2\cdot\frac{1}{x+a}\cdot\frac{-b-a}{x-b}\\&=2\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x+a}\cdot\frac{a+b}{x-b}\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(a+b)}{x^2+(a-b)x-ab}\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{a+b}{1+\frac{a-b}{x}-\frac{ab}{x^2}}\\&=2(a+b)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln y} = e^{2(a+b)}$$

3. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)^x$

Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+a}{2x+b}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1$$

$$y = \left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+b}{2x+a}\cdot\frac{2(2x+b)-(2x+a)2}{(2x+b)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -x^2\cdot\frac{1}{2x+a}\cdot\frac{2b-2a}{2x+b} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{2x+a}\cdot\frac{2a-2b}{2x+b} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2(a-b)}{4x^2+2(a+b)x+ab} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2(a-b)}{4+\frac{2(a+b)}{x}+\frac{ab}{x^2}} \\
&= \frac{2(a-b)}{4} = \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln y} = e^{\frac{a-b}{2}}$$

4. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-b}\right)^x$

Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+a}{3x-b}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{3} = 1$$

$$y = \left(\frac{3x+a}{3x-b}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(\frac{3x+a}{3x-b}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3x+a}{3x-b}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-b}{3x+a}\cdot\frac{3(3x-b)-(3x+a)3}{(3x-b)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -x^2 \cdot \frac{1}{3x+a} \cdot \frac{-3b-3a}{3x-b} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{3x+a} \cdot \frac{3a+3b}{3x-b} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2(a+b)}{9x^2+3(a-b)x-ab} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3(a+b)}{9+\frac{3(a-b)}{x}-\frac{ab}{x^2}} \\
&= \frac{3(a+b)}{9} = \frac{a+b}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln y} = e^{\frac{a+b}{3}}$$

Derivação implícita

1. Determine o declive, se existir, da reta tangente à curva $x^2+2xy+y^2-x-2y=1$ no ponto de abcissa $x=1$ e ordenada positiva.

Queremos $y'(1)$, se existir. Derivando implicitamente com respeito x

$$\begin{aligned}2x+2y+2xy'+2yy'-1-2y'&=0\\(2x+2y-2)y'&=1-2x-2y\\y'&=\frac{1-2x-2y}{2x+2y-2}\end{aligned}$$

Para $x=1$

$$\begin{aligned}1+2y+y^2-1-2y&=1\\y^2&=1\\y&=1 \text{ ou } y=-1\end{aligned}$$

O ponto tem ordenada positiva logo é $(1,1)$ e o declive é

$$y'(1)=\frac{1-2-2}{2+2-2}=-\frac{3}{2}$$

2. Determine o declive, se existir, da reta tangente à curva $x^2-2xy+y^2+x-2y=1$ no ponto de ordenada $y=-1$ e abcissa menor que -1.

Derivando implicitamente com respeito x

$$\begin{aligned}2x-2y-2xy'+2yy'+1-2y'&=0\\(-2x+2y-2)y'&=-1-2x+2y\\y'&=\frac{-1-2x+2y}{-2x+2y-2}\end{aligned}$$

Para $y=-1$

$$\begin{aligned}x^2+2x+1+x+2&=1\\x^2+3x+2&=0\\(x+1)(x+2)&=0\\x&=-1 \text{ ou } x=-2\end{aligned}$$

O ponto em questão é $(-2,-1)$ e o declive não está definido aí, pois

$$y'(-2)=\frac{-1-2(-2)+1(-1)}{-2(-2)+2(-1)-2}=\frac{2}{0}$$

(No ponto em questão, a reta tangente à curva seria vertical)

3. Determine o declive, se existir, da reta tangente à curva $x^2-2xy+y^2-x+2y=1$ no ponto de abcissa $x=1$ e ordenada positiva.

Queremos $y'(1)$, se existir. Derivando implicitamente com respeito x

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2xy' + 2yy' - 1 + 2y' &= 0 \\ (-2x + 2y + 2)y' &= 1 - 2x + 2y \\ y' &= \frac{1 - 2x + 2y}{-2x + 2y + 2} \end{aligned}$$

Para $x = 1$

$$\begin{aligned} 1 - 2y + y^2 - 1 + 2y &= 1 \\ y^2 &= 1 \\ y &= 1 \text{ ou } y = -1 \end{aligned}$$

O ponto em questão é $(1, 1)$ e o declive é

$$y'(1) = \frac{1 - 2(1) + 2(1)}{-2(1) + 2(1) + 2} = \frac{1}{2}$$

4. Determine o declive, se existir, da reta tangente à curva $x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 1$ no ponto de abcissa $x = -1$ e ordenada positiva.

Queremos $y'(-1)$, se existir. Derivando implicitamente com respeito x

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2xy' + 2yy' + 1 + 2y' &= 0 \\ (2x + 2y + 2)y' &= -1 - 2x - 2y \\ y' &= -\frac{1 + 2x + 2y}{2x + 2y + 2} \end{aligned}$$

Para $x = -1$

$$\begin{aligned} 1 - 2y + y^2 - 1 + 2y &= 1 \\ y^2 &= 1 \\ y &= 1 \text{ ou } y = -1 \end{aligned}$$

O ponto em questão é $(-1, 1)$ e o declive é

$$y'(-1) = -\frac{1 + 2(-1) + 2(1)}{2(-1) + 2(1) + 2} = -\frac{1}{2}$$

Taxas relacionadas

1. A altura de um triângulo está diminuindo a uma taxa de 2 cm/min enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 1 cm^2/min.

   Sejam

   t : o instante de tempo (em min)

   b: a base do triângulo (em cm) no instante t

   h : a altura do triângulo (em cm) no instante t

   A : a área do triângulo (em cm^2) no instante t

   Encontre uma relação entre as variáveis A, b, h e determine a que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2.

Temos $\frac{dA}{dt} = 1$, $\frac{dh}{dt} = -2$ e queremos $\frac{db}{dt}$ no instante em que $h = 10$ e $A = 100$.

A relação entre as variáveis é, pela fórmula da área do triângulo,

$$A = \frac{bh}{2}$$

e derivando com respeito a t

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(h\frac{db}{dt} + b\frac{dh}{dt}\right)$$

Para $h = 10$ e $A = 100$, temos $100 = \frac{b(10)}{2}$, logo $b = 20$ e

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}\left(10\frac{db}{dt} + 20(-2)\right) \\ 2 &= 10\frac{db}{dt} - 40 \\ \frac{db}{dt} &= \frac{2+40}{10} = \frac{21}{5} \quad (cm/min) \end{aligned}$$

2. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 2 cm/min enquanto a área do triângulo está diminuindo a uma taxa de 1 cm^2/min.

   Sejam

   t : o instante de tempo (em min)

   b: a base do triângulo (em cm) no instante t

   h : a altura do triângulo (em cm) no instante t

   A : a área do triângulo (em cm^2) no instante t

   Encontre uma relação entre as variáveis A, b, h e determine a que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2.

Temos $\frac{dA}{dt} = -1$, $\frac{dh}{dt} = 2$ e queremos $\frac{db}{dt}$ no instante em que $h = 10$ e $A = 100$.

A relação entre as variáveis é, pela fórmula da área do triângulo,

$$A = \frac{bh}{2}$$

e derivando com respeito a t

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(h\frac{db}{dt} + b\frac{dh}{dt}\right)$$

Para $h = 10$ e $A = 100$, temos $100 = \frac{b(10)}{2}$, logo $b = 20$ e

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2}\left(10\frac{db}{dt} + 20(2)\right) \\ -2 &= 10\frac{db}{dt} + 40 \\ \frac{db}{dt} &= \frac{-2+40}{10} = \frac{19}{5} \quad (cm/min) \end{aligned}$$

3. A altura de um triângulo está diminuindo a uma taxa de 1 cm/min enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 2 cm^2/min.

   Sejam

   t : o instante de tempo (em min)

   b: a base do triângulo (em cm) no instante t

   h : a altura do triângulo (em cm) no instante t

   A : a área do triângulo (em cm^2) no instante t

   Encontre uma relação entre as variáveis A, b, h e determine a que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2.

Temos $\frac{dA}{dt} = 2$, $\frac{dh}{dt} = -1$ e queremos $\frac{db}{dt}$ no instante em que $h = 10$ e $A = 100$.

A relação entre as variáveis é, pela fórmula da área do triângulo,

$$A = \frac{bh}{2}$$

e derivando com respeito a t

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(h\frac{db}{dt} + b\frac{dh}{dt}\right)$$

Para $h = 10$ e $A = 100$, temos $100 = \frac{b(10)}{2}$, logo $b = 20$ e

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{2}\left(10\frac{db}{dt} + 20(-1)\right) \\ 4 &= 10\frac{db}{dt} - 20 \\ \frac{db}{dt} &= \frac{4+20}{10} = \frac{12}{5} \quad (cm/min) \end{aligned}$$

4. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 1 cm/min enquanto a área do triângulo está diminuindo a uma taxa de 2 cm^2/min.

   Sejam

   t : o instante de tempo (em min)

   b: a base do triângulo (em cm) no instante t

   h : a altura do triângulo (em cm) no instante t

   A : a área do triângulo (em cm^2) no instante t

   Encontre uma relação entre as variáveis A, b, h e determine a que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2.

Temos $\frac{dA}{dt} = -2$, $\frac{dh}{dt} = 1$ e queremos $\frac{db}{dt}$ no instante em que $h = 10$ e $A = 100$.
A relação entre as variáveis é, pela fórmula da área do triângulo,

$$A = \frac{bh}{2}$$

e derivando com respeito a t

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(h\frac{db}{dt} + b\frac{dh}{dt}\right)$$

Para $h = 10$ e $A = 100$, temos $100 = \frac{b(10)}{2}$, logo $b = 20$ e

$$\begin{aligned}
-2 &= \frac{1}{2}\left(10\frac{db}{dt} + 20(1)\right)\\
-4 &= 10\frac{db}{dt} + 20\\
\frac{db}{dt} &= \frac{-4-20}{10} = -\frac{12}{5} \quad (cm/min)
\end{aligned}$$