Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 11/11/20 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. (3,5) Determine:

   (a) a equação da reta tangente à curva $-y + x^2 = 2y^2$ no ponto $(-1, 1/2)$

[1,0]
A equação será $y - 1/2 = m(x+1)$, em que $m = y'(-1)$ que obtemos derivando implicitamente:

$$\begin{aligned} -y' + 2x = 4yy' &\Rightarrow \\ &\Rightarrow y'(1+4y) = 2x \\ &\Rightarrow y' = \frac{2x}{1+4y} \end{aligned}$$

Para $y = 1/2$, $x = -1$, temos $m = -2/3$. Portanto a equação da reta fica sendo

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x+1) &\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

   (b) $\frac{d}{dx}[\ln f(g(x))]$ para $x = 0$, sabendo que $f(x) = x \cdot \text{sen } x$ e $g'(0) = g(0) = \pi/2$

[1,0]
Aplicando regras de derivação

$$\frac{d}{dx}\left[\ln f(g(x))\right] = \frac{\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right]}{f(g(x))} = \frac{f'(g(x))g'(x)}{f(g(x))}$$

Para $x = 0$ temos $g(0) = g'(0) = \pi/2$, logo

$$\frac{d}{dx}\left[\ln f(g(x))\right](0) = \frac{f'(g(0))g'(0)}{f(g(0))} = \frac{f'(\pi/2)\pi/2}{f(\pi/2)}$$

Temos $f(\pi/2) = \pi/2 \cdot \text{sen }(\pi/2) = \pi/2$ e $f'(x) = \text{sen } x + x\cos x$, donde

$$f'(\pi/2) = \text{sen }(\pi/2) + \pi/2 \cdot \cos(\pi/2) = 1 + 0 = 1.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}\left[\ln f(g(x))\right](0) = \frac{1 \cdot \pi/2}{\pi/2} = 1.$$

(c) $\lim_{x\to\pi}\left(\text{cotg } x - \frac{1}{x-\pi}\right)$

[1,5]
(Forma indeterminada $\infty - \infty$ quando $x \to \pi^+$)
Procuramos uma forma para aplicar a Regra de L'Hospital
Solução 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}\left(\text{cotg } x - \frac{1}{x-\pi}\right) &= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{(x-\pi)\text{cotg } x - 1}{x-\pi}\right) = \lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi-\text{tg } x}{(x-\pi)\text{tg } x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sec^2 x}{\text{tg } x + (x-\pi)\sec^2 x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{-2\sec^2 x\cdot \text{tg } x}{\sec^2 x + \sec^2 x + (x-\pi)\cdot 2\sec^2 x\cdot\text{tg } x}\\
&= \lim_{x\to\pi}\frac{-2\text{tg } x}{2+2(x-\pi)\text{tg } x}\\
&= \frac{0}{2+0}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Solução 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}\left(\text{cotg } x - \frac{1}{x-\pi}\right) &= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x} - \frac{1}{x-\pi}\right) = \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\cos x - \text{sen } x}{(x-\pi)\text{sen } x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\cos x - (x-\pi)\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + (x-\pi)\cos x}\\
&= \lim_{x\to\pi}\frac{-(x-\pi)\text{sen } x}{\text{sen } x + (x-\pi)\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{-\text{sen } x - (x-\pi)\cos x}{\cos x + \cos x - (x-\pi)\text{sen } x}\\
&= \frac{0}{-2+0}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. (3,5) Acerca da função $f(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$, indique, justificando:

(a) se existem assíntotas horizontais/verticais

[0,5]
A função é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto não tem assíntotas verticais.

Temos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - e^{-\infty} = 1$, portanto a reta $y = 1$ é única assíntota horizontal.

(b) intervalos onde é crescente/decrescente, e existência de máximos/mínimos locais

[1,0]
Derivando

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Note que o sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal de x, pois restante fator é positivo, portanto $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Pelo Teste C/D, concluímos que f é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$.

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluímos que $f(0) = 1 - 1 = 0$ é mínimo (global) e não existem outros extremos (pois $x = 0$ é o único zero da derivada).

(c) intervalos onde tem concavidade voltada para baixo/cima e existência de pontos de inflexão

[1,5]

Derivando

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} + x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) \quad \text{(por (b))} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) \end{aligned}$$

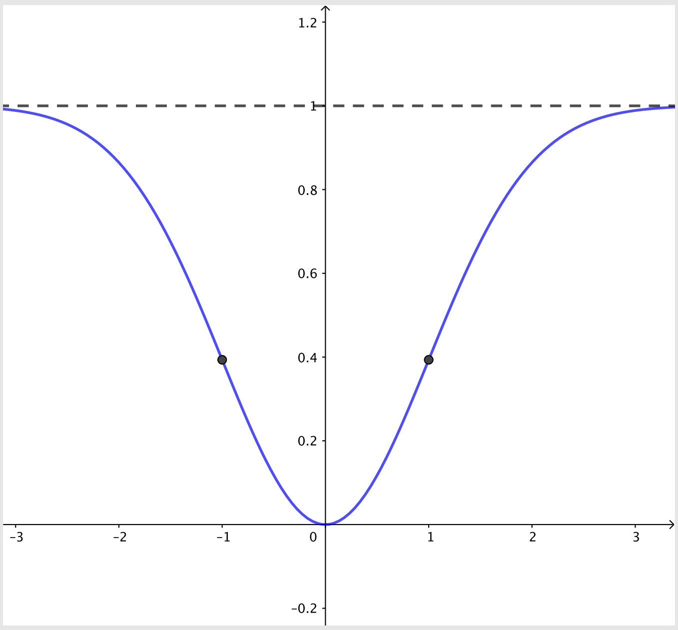
e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Note que o sinal de $f''(x)$ é igual ao sinal de $1 - x^2$, pois o restante fator é positivo, portanto $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$ e $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Pelo Teste da Concavidade, concluímos que f tem concavidade para baixo para $x < -1$ e para $x > 1$ e tem concavidade para cima para $-1 < x < 1$; além disso, os pontos de inflexão são $(1, f(1)) = (1, 1 - e^{-1/2})$ e $(-1, f(-1)) = (-1, 1 - e^{-1/2})$.

(d) um esboço do gráfico.

[0,5]



3. (2,0)

Considere o triângulo ABC, tal que o lado AB mede 3cm, o lado AC mede 6cm e o ângulo θ entre eles está variando a uma taxa de 0,02rad/s. Os tamanhos dos lados AB e AC são fixos. Encontre a taxa de variação do crescimento da área do triângulo ABC, quando o ângulo θ é $\pi/6$.

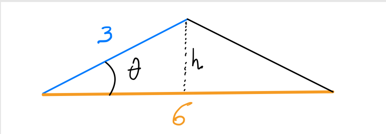
Sejam

θ : o ângulo entre os lados de comprimento 3 e 6 em rad em cada instante (em segundos)

A : área do triângulo em m^2 em cada instante (em segundos).

Temos $\frac{d\theta}{dt} = 0,02$ e queremos $\frac{dA}{dt}$ no instante em que $\theta = \pi/6$.

A área do triângulo é dada por $A = \frac{1}{2}bh$ em que b é a base do triângulo e h a altura correspondente.



Para $b = 6$, temos $h = 3\text{sen }\theta$ (cf. figura), donde $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\text{sen }\theta = 9\text{sen }\theta$ e

$$\frac{dA}{dt} = 9\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Para $\frac{d\theta}{dt} = 0,02$ e $\theta = \pi/6$ temos $\frac{dA}{dt} = 9\cos(\pi/6) \cdot (0,02) = 9\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (0,02) = \frac{9\sqrt{3}}{100}$ (rad/s).

4. (1,0) Considere a curva $y - \text{senh }x = -\cosh x$ no plano xOy.

(a) A curva pode ser reescrita como $y = e^x$? Justifique, se for verdadeiro, e apresente contra-exemplo, se for falso.

[0,5]
Falso, o ponto $(0,1)$ está na curva $y = e^x$, pois $1 = e^0$, mas não está na curva $y - \text{senh }x = -\cosh x$, pois $1 - \text{senh }0 = -\cosh 0 \Leftrightarrow 1 = -1$, que é falso.

(b) Prove que existe um ponto (x, y) da curva acima que está mais próximo do ponto $(0,0)$.

[0,5]
Pela definição de $\cosh x$ e de $\text{senh }x$ a curva do enunciado pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y - \text{senh }x = -\cosh x &\Leftrightarrow y = \text{senh }x - \cosh x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = -e^{-x}. \end{aligned}$$

Queremos provar que existe um ponto (x, y) que minimiza a distância entre (x, y) e $(0,0)$ dada por

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

onde (x, y) está sujeito a $y = -e^{-x}$ (por (a)).
Assim, queremos o mínimo global de $d(x) = \sqrt{x^2 + (-e^{-x})^2} = \sqrt{x^2 + e^{-2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
Lembre que :
x minimiza a distância $d(x)$ se e somente se x minimiza $f(x) = d^2(x) = x^2 + e^{-2x}$.

Temos $f'(x) = 2x - 2e^{-2x}$. Como $f'(0) = 0 - 2e^0 = -2 < 0$ e $f'(1) = 2 - \frac{2}{e^2} > 0$ e f' é contínua em $[0, 1]$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por outro lado, $f''(x) = 2 + 4e^{-2x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde f' é estritamente crescente para todo x, c é o único zero de f' e temos $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, $f'(x) > 0$ para todo $x > c$. Assim, $f(c)$ é mínimo global de f (Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos).

Conclusão: o ponto $(c, -e^{-c})$ é um ponto da curva mais próximo de $(0, 0)$.