Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 14/12/20 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Utilizando técnicas de integração, determine:

   (a) (1,5)$\int_e^{e^2} \frac{f(2\ln x)}{x}dx$, sendo f contínua tal que $\int_2^4 f(x)dx = 3$.

Substituindo $\begin{cases} u = 2\ln x \\ du = \frac{2}{x}dx \\ x = e \Rightarrow u = 2\ln(e) = 2 \\ x = e^2 \Rightarrow u = 2\ln(e^2) = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases}$

$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(u)du = \frac{3}{2}.$$

   (b) (1,5) $\int \ln(1+x^2)dx$

$u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}dx$
$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2)dx &= x\ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

Dividindo o polinômio x^2 por $1+x^2$, temos:

$$x^2 = (1+x^2)\cdot 1 - 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2)dx &= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2(x - \text{arctg}x) + C\end{aligned}$$

   (c) (1,5) Determine $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+(b-a)x-ab}dx$ $(a \neq -b)$.

Fatorando $x^2 + (b-a)x - ab = (x-a)(x+b)$.
Por decomposição em frações parciais, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2+(b-a)x-ab} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+b} \\
&\Rightarrow 2 = A(x+b) + B(x-a) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A+B \\ 2 = bA - aB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2 = -bB - aB \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2 = -(a+b)B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{a+b} \\ B = -\frac{2}{a+b} \end{cases}
\end{aligned}$$

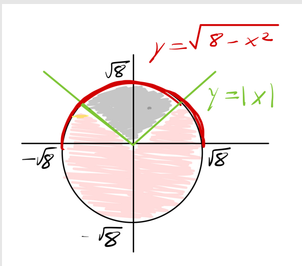
Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2+(b-a)x-ab}dx &= \frac{2}{a+b}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{2}{a+b}\int \frac{1}{x+b}dx \\
&= \frac{2}{a+b}\ln|x-a| - \frac{2}{a+b}\ln|x+b| + C \\
&= \frac{2}{a+b}\ln\left|\frac{x-a}{x+b}\right| + C
\end{aligned}$$

2. (2,0) O gráfico de $y = |x|$ divide o disco $x^2 + y^2 \leq 8$ em duas regiões.

   (a) Esboçe as regiões e escreva uma integral que representa a área da região menor.

Esboço



Interseções

$$\begin{cases} y = |x| \\ y^2 + x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x| \\ x^2 + x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x| \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por simetria, a área pretendida é $2\int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - x)dx$

   (b) Calcule a área da região menor.

Queremos

$$
\begin{aligned}
2\int_0^2 (\sqrt{8-x^2}-x)dx &= 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx - \int_0^2 2xdx \\
&= 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx - \left[x^2\right]_0^2 = 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2} - 4
\end{aligned}
$$

Calculemos $I := \int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$.

Substituindo $\begin{cases} x = \sqrt{8}\ \text{sen}\ \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ dx = \sqrt{8}\ \cos\ \theta d\theta \\ x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

e

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{8}\cos\ \theta \cdot \sqrt{8}\cos\ \theta d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \cos\ ^2\theta d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos\ 2\theta}{2}d\theta \\
&= 4\big[\theta + \frac{\text{sen}\ 2\theta}{2}\big]_0^{\pi/4} \\
&= 4[(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})-0] \\
&= \pi + 2
\end{aligned}
$$

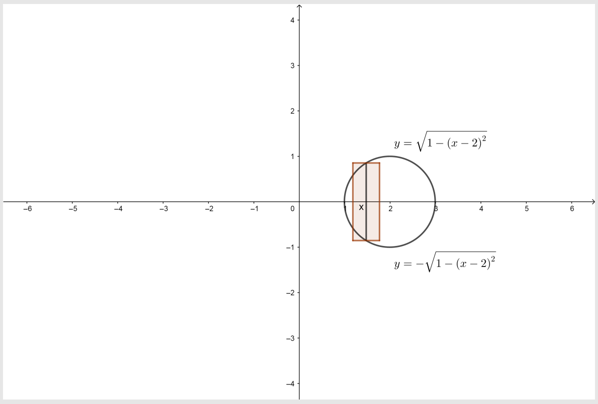
Portanto, a área é $2I - 4 = 2(\pi+2) - 4 = 2\pi$.

Nota: Este resultado também pode ser obtido observando que a região menor se trata de um quarto de um disco de raio $\sqrt{8}$, logo é $\frac{\pi\sqrt{8}^2}{4} = 2\pi$.

3. (1,5) Escreva uma fórmula para o volume do sólido obtido pela rotação do círculo $(x-2)^2+y^2 = 1$ ao redor do eixo y. Indique qual método foi utilizado e ilustre a sua solução esboçando o círculo dado.

Observe que

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow y^2 = 1 - (x-2)^2 \\
&\Rightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-2)^2}
\end{aligned}
$$



Usando o método de cascas cilíndricas, temos que o volume V do sólido obtido pela rotação do círculo ao redor do eixo y é:

$$V = \int_1^3 2\pi x \cdot 2\sqrt{1-(x-2)^2}dx = 4\pi \int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}dx$$

4. (2,0) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que para todo o número real x

$$\int_1^x f(t)dt = xe^x + \int_{-x}^1 e^t f(-t)dt.$$

Encontre uma fórmula explícita para a função f.

Note que

$$\int_1^x f(t)dt = xe^x - \int_1^{-x} e^t f(-t)dt.$$

Derivando cada lado com respeito a x

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + xe^x + e^{-x}f(x) \quad \text{(TFC1 e regra da cadeia)} \\ f(x)(1-e^{-x}) &= e^x(1+x) \\ f(x) &= \frac{e^x(1+x)}{1-e^{-x}} \end{aligned}$$