Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 14/12/20 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Utilizando técnicas de integração, determine:

   (a) (1,5) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{f(\text{arctg } x)}{1+x^2} dx$, sendo f contínua e par tal que $\int_0^{\pi/3} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Substituindo $\begin{cases} u = \text{arctg } x \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ x = \sqrt{3} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{3} \\ x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{f(\text{arctg } x)}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(u)du = 2\int_0^{\pi/3} f(x)dx = 1$$

   (b) (1,5) $\int e^t \cos t dt$

$$\begin{aligned} I := \int e^t \cos t dt &\stackrel{PP}{=} -\int e^t(-\text{sen } t)dt + e^t \cos t \\ &= \int e^t \text{sen } t dt + e^t \cos t \\ &\stackrel{PP}{=} -\underbrace{\int e^t \cos t dt}_{I} + e^t \text{sen } t + e^t \cos t \end{aligned}$$

Assim $2I = e^t \text{sen } t + e^t \cos t + C$, e

$$I = \frac{e^t}{2}(\text{sen } t + \cos t) + \tilde{C}$$

   (c) (1,5) Determine $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 + (b+a)x + ab} dx$ $(a \neq b)$.

Fatorando $x^2 + (b+a)x + ab = (x+a)(x+b)$.

Por decomposição em frações parciais, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2+(b+a)x+ab} &= \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} \\
&\Rightarrow 2 = A(x+b) + B(x+a) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A+B \\ 2 = bA + aB \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2 = -bB + aB \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2 = (a-b)B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{a-b} \\ B = \frac{2}{a-b} \end{cases}
\end{aligned}$$

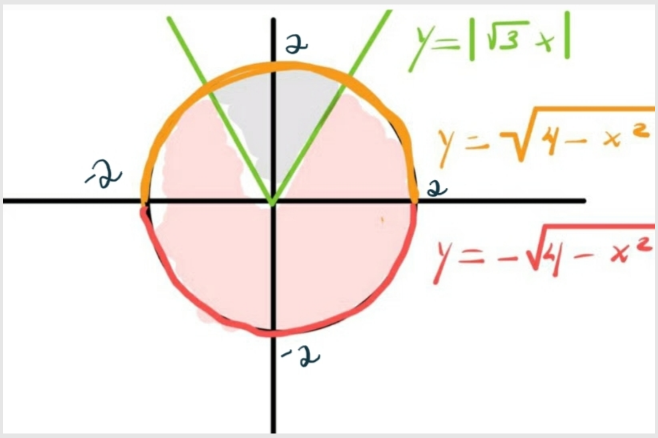
Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2+(b+a)x+ab} dx &= -\frac{2}{a-b} \int \frac{1}{x+a} dx + \frac{2}{a-b} \int \frac{1}{x+b} dx \\
&= -\frac{2}{a-b} \ln|x+a| + \frac{2}{a-b} \ln|x+b| \\
&= \frac{2}{a-b} \ln \left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C
\end{aligned}$$

2. (2,0) O gráfico de $y = |\sqrt{3}x|$ divide o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ em duas regiões.

   (a) Esboçe as regiões e escreva e represente a área da região maior com integrais.

Esboço



Interseções

$$\begin{cases} y = |\sqrt{3}x| \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = |\sqrt{3}x| \\ x^2 + 3x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = |\sqrt{3}x| \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ x = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Por simetria, a área pretendida é

$$\pi 2^2 - 2\int_0^1 \sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x dx$$

   (b) Calcule a área da região maior.

Queremos

$$
\begin{aligned}
4\pi - 2\int_0^1 \sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x dx &= 4\pi - 2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx + 2\sqrt{3}\int_0^1 x dx \\
&= 4\pi - 2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx + \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Calculemos $I := \int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$.

Substituindo $\begin{cases} x = 2\text{sen }\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ dx = 2\cos\,\theta d\theta \\ x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

e

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/6} (2\cos\,\theta)2\cos\,\theta d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/6} \cos\,^2\theta d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos\,2\theta}{2} d\theta \\
&= 2\big[\theta + \frac{\text{sen }2\theta}{2}\big]_0^{\pi/6} \\
&= 2[(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}) - 0] \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

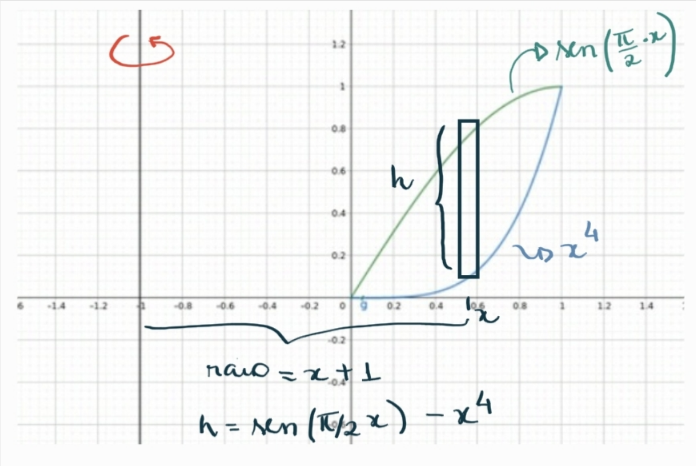
Portanto, a área da região maior é $4\pi - 2I + \sqrt{3} = 4\pi - 2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \sqrt{3} = \frac{10\pi}{3}$.

Nota: Este resultado também pode ser obtido observando que a região maior se trata de 5 vezes a sexta parte de um disco de raio 2, logo é $5\frac{\pi 2^2}{6} = \frac{10\pi}{3}$.

3. (1,5) Escreva uma fórmula para o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = -1$ da região delimitada pelas curvas $y = x^4$ e $y = \text{sen }(\pi x/2)$. Indique qual método foi utilizado e ilustre a sua solução esboçando a região dada.

Note que as curvas se intesectão nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Além disso, no intervalo $[0,1]$, temos $\text{sen }(\pi x/2) \geq x^4$. Usando o método de cascas cilíndricas, temos

$$
V = \int_0^1 2\pi(x+1)(\text{sen }(\pi x/2) - x^4)dx.
$$



4. (2,0) Seja f uma função contínua, par em $\mathbb{R}$ tal que para todo o número real x

$$\int_1^{-x} f(-t)dt = x\ln x + \int_x^1 f(-t)\cos\, t dt.$$

Encontre uma fórmula explícita para a função f.

Por paridade e trocando os extremos de integração

$$\int_1^{-x} f(t)dt = x\ln x - \int_1^x f(t)\cos\, t dt.$$

Derivando cada lado com respeito a x

$$-f(-x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - f(x)\cos\, x \quad \text{(TFC1 e regra da cadeia)}$$

Por paridade novamente

$$\begin{aligned} -f(x) &= \ln x + 1 - f(x)\cos\, x \\ (\cos\, x - 1)f(x) &= \ln x + 1 \\ f(x) &= \frac{\ln x + 1}{\cos\, x - 1} \end{aligned}$$