Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 18/12/20 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

   (a) (1,5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+3x} - \sqrt{5x^2+2x})$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+3x} - \sqrt{5x^2+2x}) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+3x} - \sqrt{5x^2+2x}) \cdot \frac{\sqrt{5x^2+3x} + \sqrt{5x^2+2x}}{\sqrt{5x^2+3x} + \sqrt{5x^2+2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x-(5x^2+2x)}{\sqrt{5x^2+3x} + \sqrt{5x^2+2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{5x^2+3x} + \sqrt{5x^2+2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{5x^2+3x}+\sqrt{5x^2+2x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{5x^2+3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{5x^2+2x}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5+\frac{3}{x}} + \sqrt{5+\frac{2}{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

   (b) (1,0) Sendo $f(x) = e^{ax} + e^{-bx}$, encontre uma fórmula para a n-ésima derivada de f, $f^{(n)}(x)$, para todo n.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ae^{ax} - be^{-bx} \\
f''(x) &= a^2e^{ax} + b^2e^{-bx} \\
f'''(x) &= a^3e^{ax} - b^3e^{-bx} \\
f^{(4)}(x) &= a^4e^{ax} + b^4e^{-bx} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= a^ne^{ax} + (-1)^nb^ne^{-bx}
\end{aligned}$$

2. (2,5) Sejam a, b números reais. Seja f a função definida abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} 7x - b, & x \geq 0 \\ \cos\,(ax + \pi/2) + x^3 \cdot \text{sen}\,(2/x), & x < 0 \end{cases}$$

   (a) Se escolhermos $a = 1$ e $b = 2$, a função f é contínua no ponto $x = 0$?

   (b) Determine a e b para que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(a) Para $a = 1$ e $b = 2$, temos que $f(0) = -2$, enquanto

$$\lim_{x\to 0^-} \big(\cos\,(x + \pi/2) + x^3 \cdot \text{sen}\,(2/x)\big) = 0,$$

pois $\cos\,(\pi/2) = 0$, e como $\text{sen}\,(2/x)$ é limitado e x^3 tende a zero, temos o resultado pelo teorema do confronto. Portanto, como $f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, a função não é contínua no ponto $x = 0$.

(b) Para ser diferenciável, devemos ter

$$\begin{array}{rcl} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} & = & \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{7h-b-(-b)}{h} & = & \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\,(ah+\pi/2)+h^3\cdot \text{sen}\,(2/h)-(-b)}{h} \\ 7 & = & \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\,(ah+\pi/2)+h^3\cdot \text{sen}\,(2/h)}{h} + \lim_{h\to 0^-} \frac{b}{h} \end{array}$$

Temos que $b = 0$ para o limite $\lim_{h\to 0^-} \frac{b}{h}$ acima existir. Por outro lado o limite

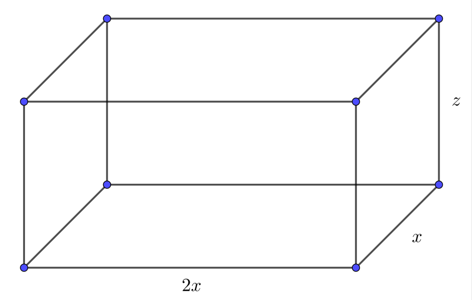
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\,(ah + \pi/2) + h^3 \text{sen}\,(2/h)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\,(ah + \pi/2)}{h}}_{L_1} + \underbrace{\lim_{h\to 0^-} h^2 \cdot \text{sen}\,(2/h)}_{L_2}.$$

O limite $L_2 = 0$ pelo teorema do confronto. O limite L_1, pode ser calculado usando L'Hopital, obtemos:

$$L_1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{a(-\text{sen}\,(ah + \pi/2))}{1} = -a$$

Portanto $a = -7$ e $b = 0$.

3. (2,5) Um tijolo no formato de um paralelepípedo é construído de forma que o seu comprimento seja o dobro da sua espessura e sua área total seja $2cm^3$. Encontre as dimensões que maximizarão o volume do tijolo.



Observe que a área total do tijolo é dada por:

$$\begin{aligned} A_T &= 2 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot 2x \cdot z + 2 \cdot x \cdot z \\ &= 4x^2 + 6xz \end{aligned}$$

Segundo as especificações a área total A_T deve ser igual a 2:

$$\begin{aligned} A_T = 4x^2 + 6xz &\Rightarrow 2 = 4x^2 + 6xz \\ &\Rightarrow 2x^2 + 3xz = 1 \\ &\Rightarrow 3xz = 1 - 2x^2 \\ &\Rightarrow z = \frac{1 - 2x^2}{3x} \end{aligned}$$

Desse modo a fórmula para o volume $V(x)$ como função de x fica sendo:

$$V(x) = 2x \cdot x \cdot \frac{1-2x^2}{3x} = \frac{2}{3}(x - 2x^3)$$

Para encontrar as dimensões que maximizarão o volume, vamos encontrar os números críticos de $V(x)$:

$$V'(x) = \frac{2}{3}(1 - 6x^2)$$

Resolvendo a equação $V'(x) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2}{3}(1-6x^2) = 0 \\ &\Rightarrow 6x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Note que $x > 0$, uma vez que ele representa uma das dimensões do tijolo. Além disso,

$$\begin{aligned} V'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{6}} \\ V'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

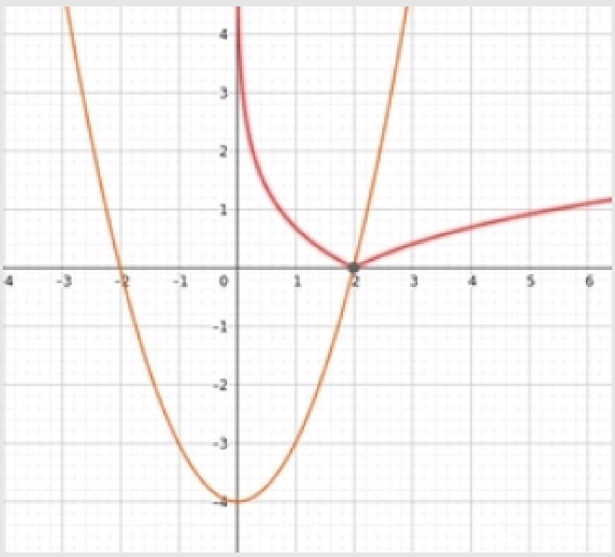
Logo $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ fornece o volume máximo. A dimensão z correspondente é:

$$z = \frac{1-2x^2}{3x} \Rightarrow z = \frac{1 - \frac{2}{6}}{\frac{3}{\sqrt{6}}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{3}{\sqrt{6}}} = \frac{4}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

Portanto, as dimensões desejadas são:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ e } \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

4. (2,5) Calcule a área delimitada pelas curvas $f(x) = |\ln(x/2)|$, $g(x) = x^2 - 4$, $x = 1$ e $x = 3$.



As curvas f e g se interceptam apenas no ponto $x = 2$. Temos que, se $1 < x < 2$, temos $x^2 - 4 < 0$, então $g(x) \leq f(x)$ no intervalo $[1, 2]$. Por outro lado, $g(x) \geq f(x)$ no intervalo $[2, 3]$. Além disso a função

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x/2), & x < 2; \\ \ln(x/2), & x \geq 2, \end{cases}$$

assim, a área procurada é dada pela integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (-\ln(x/2) - (x^2 - 4))\,dx + \int_2^3 ((x^2 - 4) - \ln(x/2))\,dx \\ &= -(x^3/3 - 4x)\Big]_1^2 + (x^3/3 - 4x)\Big]_2^3 - \int_1^3 \ln(x/2)\,dx \\ &= 4 - \int_1^3 \ln(x/2)\,dx \end{aligned}$$

Para integrar $\ln(x/2)$, usamos integração por partes:

Seja

$$\begin{cases} u = \ln(x/2) \\ dv = dx \end{cases} \quad \rightarrowtail \quad \begin{cases} du = \frac{1}{x/2} \cdot (1/2)\,dx = \frac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int_1^3 \ln(x/2)\,dx = x \cdot \ln(x/2)\Big]_1^3 - \int_1^3 1\,dx = 3\ln(3/2) - \ln(1/2) - 2$$

Portanto, a área $A = 4 - (3\ln(3/2) - \ln(1/2) - 2) = 6 - 3\ln(3/2) + \ln(1/2)$.