

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 18/12/20 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

- (a) (1,5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_1^{1+h} f(t) dt$, sendo f uma função com derivada contínua em $x = 1$ tal que $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$. (Dica: note que obtém $\frac{0}{0}$ quando $h \rightarrow 0$)

Solução 1

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_1^{1+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{2h} && \text{(RH e TFC1)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} f'(1+h) && \text{(RH)} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) && (f' \text{ é contínua}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Solução 2

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_1^{1+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{2h} && \text{(RH e TFC1)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- (b) (1,0) Encontre a linearização da função $f(x) = (1 + 3x)^5 \cdot (1 - x + 2x^2)^3$ em $a = 0$

Sabemos que a linearização de f em $a = 0$ é dada por:

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

De modo que precisamos calcular $f(0)$ e $f'(0)$:

$$f(0) = (1 + 3 \cdot 0)^5 \cdot (1 - 0 + 2 \cdot 0^2)^3 = 1^5 \cdot 1^3 = 1$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 5(1+3x)^4 \cdot 3 \cdot (1-x+2x^2)^3 + (1+3x)^5 \cdot 3 \cdot (1-x+2x^2)^2 \cdot (-1+4x) \\
 &= 15(1+3x)^4 \cdot (1-x+2x^2)^3 + 3 \cdot (1+3x)^5 \cdot (1-x+2x^2)^2 \cdot (-1+4x)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= 15 \cdot 1^4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^5 \cdot 1^2 \cdot (-1) \\
 &= 15 - 3 = 12
 \end{aligned}$$

Assim, a linearização de f fica sendo

$$L(x) = 1 + 12x$$

2. (2,5) Sejam a, b números reais. Seja f a função definida abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - b, & x \geq 0 \\ \text{sen}(ax) + x^2 \cos(5/x), & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Se escolhermos $a = 0$ e $b = 1$, a função f é contínua no ponto $x = 0$?
 (b) Determine a e b para que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(a) Para $a = 0$ e $b = 1$, temos que $f(0) = -1$, enquanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen}(0) + x^2 \cos(5/x) = 0,$$

pois $\text{sen}(0) = 0$, e como $\cos(5/x)$ é limitado e x^2 tende a zero, temos o resultado pelo teorema do confronto. Portanto, como $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, a função não é contínua no ponto $x = 0$.

(b) Para ser diferenciável, devemos ter

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h - b - (-b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h - b - (-b)}{h} \\
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h - b - (-b)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(ah) + h^2 \cos(5/h) - (-b)}{h} \\
 4 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(ah) + h^2 \cos(5/h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{b}{h}
 \end{aligned}$$

Temos que $b = 0$ para o limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{b}{h}$ acima existir. Por outro lado o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(ah) + h^2 \cos(5/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a \cdot \text{sen}(ah)}{a \cdot h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} h \cos(5/h) = a$$

pelo limite fundamental e pelo teorema do confronto. Portanto $a = 4$ e $b = 0$.

3. (2,5) Calcule a área delimitada pelas curvas $f(x) = \pi x \cdot \cos(x)$, $g(x) = |x|$, $x = -\pi/2$ e $x = 1$.

Note que as curvas se intersectam no ponto $x = 0$. Temos que

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Como a função cosseno é sempre positiva no intervalo $(-\pi/2, 1)$, temos que $f(x) \geq g(x)$ se $0 \leq x \leq 1$ e $g(x) \geq f(x)$ se $-\pi/2 \geq x \geq 0$, temos que calcular o seguinte:

$$A = \int_{-\pi/2}^0 -x - \pi x \cos(x) dx + \int_0^1 \pi x \cos(x) - x dx$$

Para isto, calculamos inicialmente uma primitiva de $\pi x \cos(x)$ usando integração por partes:

Seja

$$\begin{cases} u = \pi x \\ dv = \cos(x) dx \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} du = \pi dx \\ v = \sin(x) \end{cases}$$

Então

$$\int \pi x \cos(x) dx = \pi x \sin(x) - \int \pi \sin(x) dx = \pi(x \sin(x) + \cos(x))$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} A &= \left. (-x^2/2) \right]_{-\pi/2}^0 - \left. \pi(x \sin(x) + \cos(x)) \right]_{-\pi/2}^0 + \left. \pi(x \sin(x) + \cos(x)) \right]_0^1 - \left. x^2/2 \right]_0^1 \\ &= \pi^2/8 - \pi(1 - \pi/2) + \pi(\sin(1) + \cos(1) - 1) - 1/2 \\ &= 5\pi^2/8 - 2\pi + \pi(\sin(1) + \cos(1)) - 1/2 \end{aligned}$$

4. (2,5) Um jovem esportista se encontra num ponto O de uma represa circular com raio de 6km e quer chegar no ponto P , diametralmente oposto a O , do outro lado da represa no menor tempo possível. Ele pode correr a uma taxa de 12 km/h e remar um bote (que está no ponto O) a 6 km/h. Determine o menor tempo possível para o esportista fazer o trajeto.

O objetivo é minimizar o tempo do percurso de O até P . Supor que Q é outro ponto na circunferência tal que o jovem faz o percurso OQ de bote e QP correndo à beira da represa, então:

$$t(\theta) = \frac{OQ}{6} + \frac{QP}{12} = \frac{12 \cos \theta}{6} + \frac{12\theta}{12} = 2 \cos \theta + \theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$t'(\theta) = -2 \sin \theta + 1 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$t'(\theta) = 0; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \iff \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$t''(\theta) = -2 \cos \theta$$

Pelo teste da Segunda derivada a função tem valor mínimo em $\theta = \frac{5\pi}{6}$ e valor máximo em $\theta = \frac{\pi}{6}$. Ainda comparando os valores de t nos pontos extremos do intervalo: $t(0) = 2$; $t(\pi) = -2 + \pi$ e $t(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} \simeq 0,88$.

Portanto o menor tempo possível a ser feito pelo esportista é aprox. 0,88h.