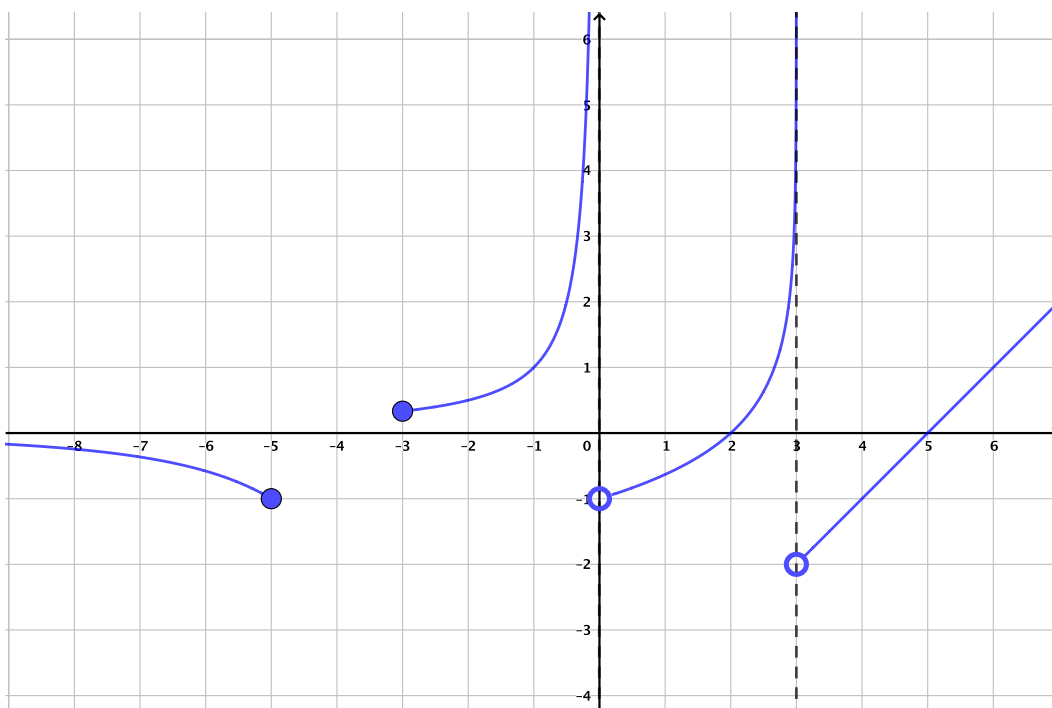


Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 01/03/21 (manhã)

Justifique suas respostas.

1. (2,0) Observe o gráfico da função f .



Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

- i) As assíntotas verticais ao gráfico de f são: $x = 0$, $x = 3$.

(0,4)

Verdadeiro, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty$, e nos restantes números a , onde faz sentido calcular os limites laterais, esses limites laterais são finitos.

- ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

(0,4)

Falso, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$.

- iii) O domínio de f é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0 \text{ e } x \neq 3\}$.

(0,4)

Falso, pois -4 **não** faz parte do domínio de f , mas -4 faz parte do conjunto D .

iv) Podemos prolongar f por continuidade atribuindo a imagem -2 ao número 3 .

(0,4)

Falso, pois não existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, donde, mesmo com o prolongamento indicado, nunca poderíamos obter continuidade em $x = 3$.

Obs. Alguns alunos interpretaram a questão como perguntando se: I) com o prolongamento indicado obteríamos uma função contínua em todo o domínio. Fora aceitas justificativas corretas com base na interpretação I), embora a expressão "prolongar por continuidade" se refira à continuidade nos pontos onde ocorre o prolongamento. Em todo o caso, a pergunta não é sobre se a função f , cujo gráfico é apresentado, é contínua em $x = 3$.

v) Uma expressão válida para $f(x)$ quando $x > 3$ é $x - 5$.

(0,4)

Verdadeiro, pois o gráfico de f é uma reta para $x > 3$ e terá a forma $y = mx + b$; como o gráfico de f contém os pontos $(4, -1)$ e $(5, 0)$, temos $m = \frac{0 - (-1)}{5 - 4} = 1$ e $0 = 1 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -5$.

2. (3,5) Determine, se existirem:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x(\sqrt{x} + 1/x)}{x + |x|^{3/2}}$

(0,5)

Para $x > 0$, $|x| = x$ e

$$\begin{aligned} \frac{x(\sqrt{x} + 1/x)}{x + |x|^{3/2}} &= \frac{x(\sqrt{x} + 1/x)}{x + x^{3/2}} \\ &= \frac{x^{3/2} + 1}{x + x^{3/2}} \\ &= \frac{1 + 1/x^{3/2}}{1/x^{1/2} + 1} \quad (\text{dividindo por } x^{3/2} \text{ no numerador e no denominador}) \end{aligned}$$

expressão que converge a $\frac{1+0}{0+1} = 1$ quando $x \rightarrow \infty$.

(0,5)

Tendo em conta a continuidade de arctg , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x(\sqrt{x} + 1/x)}{x + |x|^{3/2}} = \operatorname{arctg} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x} + 1/x)}{x + |x|^{3/2}} = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{2-x}} f(x)$, sabendo que $e^{\frac{1}{1-x^2}} + \pi \leq f(x) \leq \arccos \frac{1-x^2}{2x-2}$ onde para todo $x > 1$.

(1,0)

Por um lado,

$$\frac{1-x^2}{2x-2} = -\frac{1}{2} \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = -\frac{1}{2}(1+x)$$

expressão que converge a -1 quando $x \rightarrow 1^+$.

Tendo em conta a continuidade de \arccos temos

(0,5)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arccos \frac{1-x^2}{2x-2} = \arccos \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{2x-2} = \arccos(-1) = \pi.$$

Por outro lado,

(0,5)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x^2}} + \pi = e^{\frac{1}{0^+}} + \pi = e^{-\infty} + \pi = 0 + \pi = \pi.$$

(0,25)

Pelo Teorema do Confronto, concluímos $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pi$.

Portanto,

(0,25)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{2-x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{2-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^1 \cdot \pi = e \cdot \pi.$$

3. (2,5) Sejam $f(x) = a^2 \sin(x) + 1$ e $g(x) = \arcsen\left(\frac{x-1}{a^2}\right)$, onde $a \neq 0$.

Simplifique $f(g(x))$ e determine o domínio de $f \circ g$.

(1,0)

$f(g(x)) = a^2 \sin(g(x)) + 1 = a^2 \sin\left(\arcsen\left(\frac{x-1}{a^2}\right)\right) + 1 = a^2 \frac{x-1}{a^2} + 1 = x$, onde a penúltima igualdade anterior vem de $\sin(\arcsen(y)) = y$, para todo $y \in [-1, 1]$.

(1,5)

Como f tem domínio \mathbb{R} , para determinarmos o domínio de $f \circ g$, basta determinarmos o conjunto dos números reais x tais que $g(x) = \arcsen\left(\frac{x-1}{a^2}\right)$ é um número real para podermos usar como argumento de f . É necessário que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x-1}{a^2} \leq 1 \\ -a^2 &\leq x-1 \leq a^2 \\ 1-a^2 &\leq x \leq a^2+1. \end{aligned}$$

Portanto o domínio de g e também de $f \circ g$ é o intervalo $[1-a^2, 1+a^2]$.

4. (2,0) Seja $f(x) = \ln(e^{ax} - b)$, $a \neq 0$, $b > 0$.

(a) Determine a domínio de f .

(0,75)

Para que $\ln(e^{ax} - b)$ esteja bem definida em x devemos ter

$$\begin{aligned} e^{ax} - b &> 0 \\ e^{ax} &> b \\ ax &> \ln b \\ x &> \frac{\ln b}{a} \end{aligned}$$

Portanto o domínio de f é o intervalo $(\frac{\ln b}{a}, \infty)$.

(b) Determine $f^{-1}(y)$.

(1,0)

Temos

$$\begin{aligned}\ln(e^{ax} - b) &= y \\ e^{ax} - b &= e^y \\ e^{ax} &= e^y + b \\ ax &= \ln(e^y + b) \\ x &= \frac{1}{a} \ln(e^y + b).\end{aligned}$$

Logo $f^{-1}(y) = \frac{1}{a} \ln(e^y + b)$.

(c) Justifique se f tem assíntota vertical $x = \frac{\ln b}{a}$.

(0,25)

Sim, pois

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\ln b}{a}^+} \ln(e^{ax} - b) = \ln(e^{a \frac{\ln b}{a}^+} - b) = \ln(0^+) = -\infty.$$