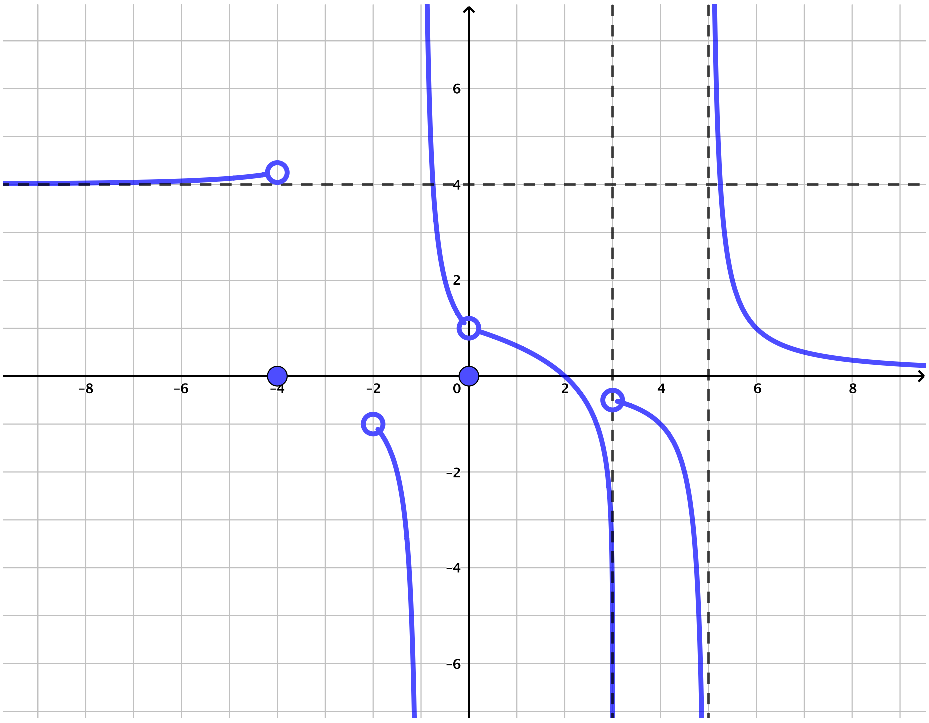
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 01/03/21 (tarde)

Justifique suas respostas.

1. (2,0) Observe o gráfico da função f.



Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

i) f é contínua à esquerda em $x = -4$

(0,4)
Falso, $f(-4) = 0 < 4 < \lim_{x\to -4^-} f(x)$

ii) As curvas $y = 0$ e $y = f(x)$ interceptam-se em três pontos.

(0,4)
Verdadeiro, a interseção das curvas ocorre nos pontos de abcissa x em que $f(x) = 0$ (zeros de f), isto é, $(-4, 0)$, $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

iii) As assíntotas verticais ao gráfico de f são exatamente $x = -1$ e $x = 5$

(0,4)
Falso, como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $x = 3$ também é assíntota vertical.

iv) Uma expressão para $f(x)$ em $x > 3$ pode ser $\frac{5}{x-5}$.

(0,4)
Falso, pois $f(4) = -1$ mas $\frac{5}{4-5} = -5$.

v) f é contínua em $x = 0$

(0,4)
Falso, pois $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

2. (3,0) Determine, se existirem:

(a) $\lim_{x\to -\infty}(x + \sqrt{x^2 + \pi x})$.

(1,5)
Quanto a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: para $x < 0$, $|x| = -x$

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x^2 + \pi x} &= x + \sqrt{x^2(1 + \pi/x)} \\
&= x + \sqrt{x^2}\sqrt{1 + \pi/x} \\
&= x + |x|\sqrt{1 + \pi/x} \\
&= x - x\sqrt{1 + \pi/x} \\
&= x(1 - \sqrt{1 + \pi/x}) \\
&= x(1 - \sqrt{1 + \pi/x})\frac{1 + \sqrt{1 + \pi/x}}{1 + \sqrt{1 + \pi/x}} \\
&= \frac{x(1 - (1 + \pi/x))}{1 + \sqrt{1 + \pi/x}} \\
&= \frac{-\pi}{1 + \sqrt{1 + \pi/x}}
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\pi}{1+\sqrt{1+\pi/x}} = -\frac{\pi}{2}$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$, onde para todo $x \neq 1$, $\frac{x^4-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{16}{\pi}$ arctg x

(1,0)
Observe que para $x \neq 1$

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = (x + 1)(x^2 + 1) \underbrace{\rightarrow}_{x\to 1} 4$$

e
(0,5)

$$\frac{16}{\pi} \operatorname{arctg} x \underbrace{\rightarrow}_{x\to 1} \frac{16}{\pi} \operatorname{arctg} 1 = \frac{16}{\pi}\frac{\pi}{4} = 4.$$

Pelo Teorema do confronto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

3. (2,5) Sejam $f(x) = \ln(x - e^b)$ e $g(x) = e^{\sqrt{x-b}}$, onde $b \in \mathbb{R}$.
Determine $f(g(x))$ e o domínio de $f \circ g$.

(0,5)

$$f(g(x)) = \ln(g(x) - e^b) = \ln(e^{\sqrt{x-b}} - e^b)$$

Para $f \circ g$ estar bem definida em x devemos ter, por um lado,

(0,5)

$$\begin{aligned} x - b &\geq 0 \\ x &\geq b \end{aligned}$$

e, por outro lado,

(0,5)

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{x-b}} - e^b &> 0 \\ e^{\sqrt{x-b}} &> e^b \\ \sqrt{x-b} &> b. \end{aligned}$$

Se $b \geq 0$, temos equivalentemente

$$\begin{aligned} x - b &> b^2 \\ x &> b + b^2 \end{aligned}$$

e como $b^2 \geq 0$, temos $b + b^2 \geq b$, logo o domínio é

(0,5)

$$(b + b^2, \infty)$$

Se $b < 0$, então $\sqrt{x-b} > b$ é verdadeira para todo x em que a raiz estiver definida. Assim, o domínio da composição é

(0,5)

$$[b, \infty).$$

4. (2,5) Seja $f(x) = \text{ arcsen } (a - \ln x)$, $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine o domínio de f.

(1,5)

Para que arcsen $(a - \ln x)$ esteja bem definida em x devemos ter

$$\begin{aligned} -1 \leq& a - \ln x \leq 1 \\ -1 - a \leq& -\ln x \leq 1 - a \\ a + 1 \geq& \ln x \geq a - 1 \\ a - 1 \leq& \ln x \leq a + 1 \\ e^{a-1} \leq& x \leq e^{a+1} \end{aligned}$$

Além disso, é necessário que $x > 0$ que é uma condição já está atendida, pois $e^{a-1} > 0$. Portanto o domínio de f é o intervalo $[e^{a-1}, e^{a+1}]$.

   (b) Determine $f^{-1}(y)$ para $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(1,0)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsen}\,(a-\ln x) &= y\\
a-\ln x &= \operatorname{sen}\,y\\
\ln x &= a-\operatorname{sen}\,y\\
x &= e^{a-\operatorname{sen}\,y}
\end{aligned}
$$

Logo $f^{-1}(y)=e^{a-\operatorname{sen}\,y}$