Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 09/04/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. (3,5) Determine, se existir:

   (a) a equação da reta tangente à curva $x^3 + xy - y^3 = 1$, no ponto de abcissa $x = 1$ e ordenada positiva.

Para obter a inclinação, determinamos y' derivando implicitamente
(1,0)

$$\begin{aligned} 3x^2 + y + xy' - 3y^2y' &= 0 \\ 3x^2 + y + (x - 3y^2)y' &= 0 \\ y' &= \frac{3x^2 + y}{3y^2 - x} \end{aligned}$$

(0,5)
Para $x = 1$, temos $1 + y - y^3 = 1 \Leftrightarrow y(1 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -1$ ou $y = 1$. Como a ordenada é positiva o ponto pretendido é $(1, 1)$, a inclinação é $y' = 2$ e a equação pretendida é

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

   (b) $F'(1)$, em que $F(x) = f(f(x))$, f é derivável, $f(1) = f'(1) = 1$.

(0,5)
Aplicando a Regra da Cadeia

$$F'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

e
(0,5)

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= f'(1) \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

   (c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)^2}{g(x)}$, supondo que $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = \lim\limits_{x \to 5} g'(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x \to 5} g''(x) = 1$.

(1,0)
Aplicamos a regra de L'Hopital duas vezes

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)^2}{g(x)} = \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{g'(x)} = \lim_{x\to 5}\frac{2}{g''(x)} = \frac{2}{1} = 2.$$

2. (3,0) A derivada de uma função f é dada por $f'(x) = \dfrac{x}{(4-x^2)^2}$. Determine:

(a) o domínio de f (admita que é o mesmo de f') e os intervalos onde f é crescente/decrescente

(0,5)
A função f' está bem definida em x desde que não se tenha $(4-x^2)^2 = 0$, i.e., $x = 2$ ou $x = -2$, portanto o domínio de f' e também de f é $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(4-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Note que o sinal de f' é igual ao sinal da expressão x, pois o fator $1/(4-x^2)^2$ é positivo. O estudo do sinal de f' e as conclusões para intervalos de monotonia estão resumidos em baixo por aplicação do Teste C/D
(0,5)

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
sinal de f'	-	-	+	+
monotonia de f	decrescente	decrescente	crescente	crescente

Atenção: f não é necessariamente crescente em $(0,+\infty)$ ou decrescente em $(-\infty,0)$.

(b) todos os números onde ocorrem máximos ou mínimos locais de f

(0,25)
Pelo Teste da 1ª Derivada concluímos que $f(0)$ é mínimo local. Não existem outros extremos locais (caso existissem outros extremos locais, teríamos outros zeros de f' pelo Teorema de Fermat).

(c) intervalos de concavidade de e pontos de inflexão de f

(0,5)
Temos

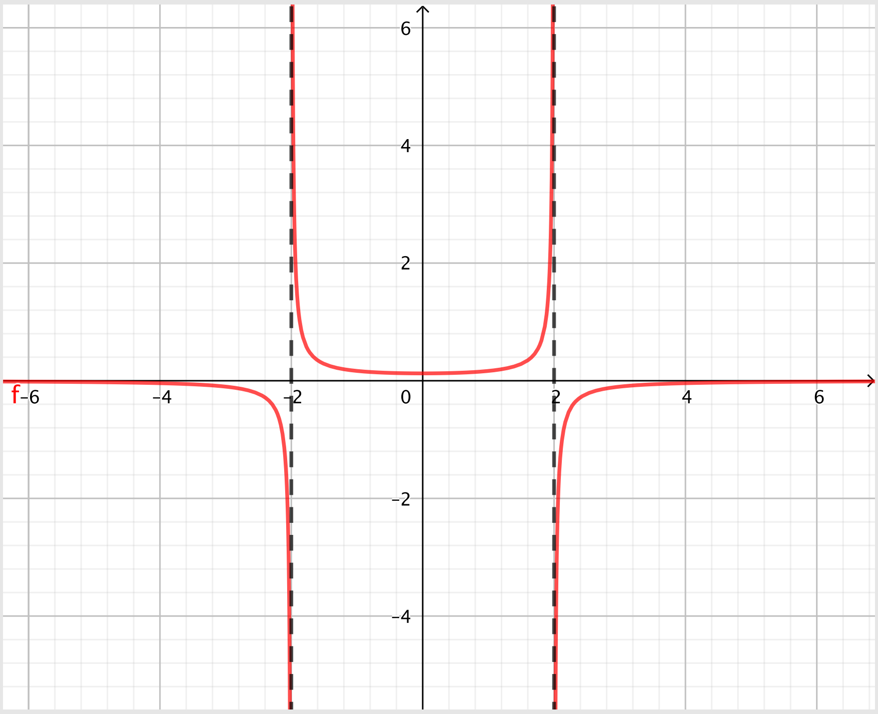
$$f''(x) = \frac{(4-x^2)^2 - x\cdot 2(4-x^2)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^4} = (4-x^2)\frac{(4-x^2)+4x^2}{(4-x^2)^4} = \frac{3x^2+4}{(4-x^2)^3}.$$

O numerador de f'' é positivo, logo f'' não se anula e não há pontos de inflexão; além disso, o sinal de f'' é igual ao sinal do denominador $(4-x^2)^3$ ou seja de $4-x^2$. O estudo do sinal de f'' e as conclusões para intervalos de concavidade estão resumidos em baixo por aplicação do Teste da Concavidade:
(0,5)

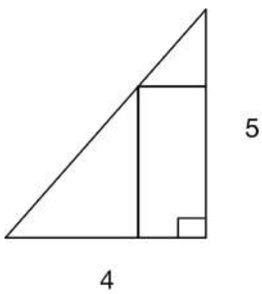
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
sinal de f''	-	+	-
concavidade de f	baixo	cima	baixo

(d) um esboço, sabendo ainda que f é função par, $y = 0$ é assíntota horizontal, $x = 2$ é assíntota vertical.

(0,75)



3. (1,5) Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimento 4 e 5 cm em que dois lados do retângulo estão sobre os catetos (cf. figura).



Sejam x, y os comprimento (em cm) dos lados do retângulo. Por semelhança de triângulos (0,5)

$$\frac{5}{4} = \frac{5-y}{x} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + 5.$$

Queremos maximizar

(0,5)

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{5}{4}x + 5\right) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x,$$

onde $x \in [0, 4]$.

Temos

$$A'(x) = -\frac{5}{2}x + 5$$

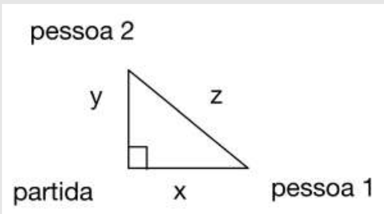
e

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -\frac{5}{2}x + 5 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(0,5)

Comparando: $A(0) = A(4) = 0$, $A(2) = 5$, logo a área máxima é 5.

4. (2,0) Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma anda para leste a 10 km/h e a outra anda para norte a 2 km/h. Quão rápido a distância entre as pessoas está variando após um quarto de hora?



Sejam

y: distância (em km) da pessoa 2 ao ponto de partida

x: distância (em km) da pessoa 1 ao ponto de partida

z: distância (em km) entre a pessoa 1 e a pessoa 2

que consideramos funções deriváveis de t (tempo em horas).

Queremos $\frac{dz}{dt}$ para $t = 15$ min$= 1/4$ h e sabemos que $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 10$.

Temos a relação

(0,5)

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Derivando em t e cancelando o fator comum 2 obtemos a relação entre taxas:

(0,5)

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Como as velocidades de deslocamento das pessoas são constantes obtemos para $t = 1/4$,

(0,5)

$$\begin{cases} y = 2 \cdot 1/4 = 1/2 \\ x = 10 \cdot 1/4 = 5/2 \end{cases} \Rightarrow z^2 = (5/2)^2 + (1/2)^2 = \frac{26}{4} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Assim,

(0,5)

$$\frac{\sqrt{26}}{2}\frac{dz}{dt} = \frac{5}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 26$$
$$\frac{dz}{dt} = 2\sqrt{26} \quad (km/h).$$