Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 09/04/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. (3,5) Determine, se existir:

   (a) (1,5) a equação da reta tangente à curva $(x-1)y+e^y=e$, no ponto de abcissa $x=1$

Para obter a inclinação, determinamos y' derivando implicitamente
(1,0)

$$\begin{aligned} y+(x-1)y'+e^y y' &= 0 \\ y+(x-1+e^y)y' &= 0 \\ y' &= -\frac{y}{x-1+e^y}. \end{aligned}$$

(0,5)
Para $x=1$, temos $0+e^y=e \Rightarrow y=1$, donde $y'(1)=-1/e$ e a equação pretendida é

$$y-1=-\frac{1}{e}(x-1).$$

   (b) (1,0) $F'(1)$, em que $F(x)=f(2f(x))$, f é derivável e $f(1)=f'(1)=1/2$

(0,5)
Aplicando a Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(2f(x))\cdot[2f(x)]' \\ &= f'(2f(x))\cdot 2f'(x) \end{aligned}$$

e
(0,5)

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(2f(1))\cdot 2f'(1) \\ &= f'(2\cdot 1/2)\cdot 2\cdot 1/2 \\ &= f'(1) \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

   (c) (1,0) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^4}$, em que g tem duas derivadas, $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} g'(x)=0$ e $\lim_{x\to 0} g''(x)=-1$.

(1,0)
Aplicamos a regra de L'Hopital duas vezes

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{12x^2} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty.$$

2. (3,0) A derivada de uma função f é dada por $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Determine:

(a) o domínio de f (admita que é o mesmo de f') e os intervalos onde f é crescente/decrescente

(0,5)
A função f' está bem definida em x desde que não se tenha $x^2 - 1 = 0$, i.e., $x = 1$ ou $x = -1$, portanto o domínio de f' e também de f é $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Note que o sinal de f' é igual ao sinal da expressão $-2x$, pois o fator $1/(x^2-1)^2$ é positivo. O estudo do sinal de f' e as conclusões para intervalos de monotonia estão resumidos em baixo por aplicação do Teste C/D
(0,5)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sinal de f'	$+$	$+$	-	-
monotonia de f	crescente	crescente	decrescente	decrescente

Atenção: f não é necessariamente decrescente em $(0, +\infty)$ ou crescente em $(-\infty, 0)$.

(b) todos os números onde ocorrem máximos ou mínimos locais de f

(0,25)
Pelo Teste da 1ª Derivada concluímos que ocorre um máximo local para $x = 0$. Não existem outros extremos locais (caso existissem, pelo Teorema de Fermat teríamos outros zeros de f') .

(c) intervalos de concavidade de e pontos de inflexão de f

(0,5)
Temos

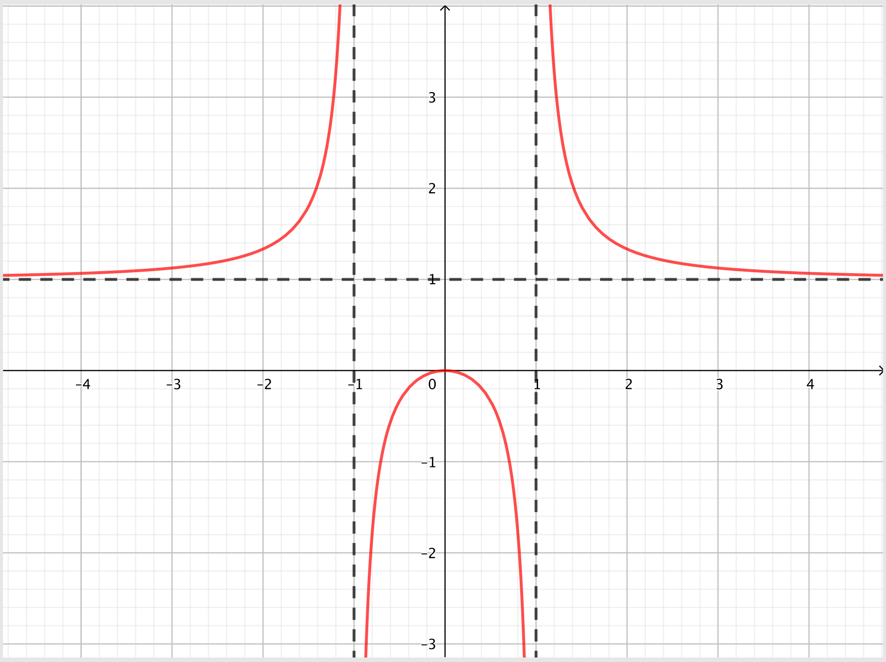
$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2 - (-2x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = (x^2-1)\frac{-2(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

O numerador de f'' é positivo, logo f'' não se anula e não há pontos de inflexão; além disso, o sinal de f'' é igual ao sinal do denominador $(x^2-1)^3$ ou seja de $x^2 - 1$. O estudo do sinal de f'' e as conclusões para intervalos de concavidade estão resumidos em baixo por aplicação do Teste da Concavidade:
(0,5)

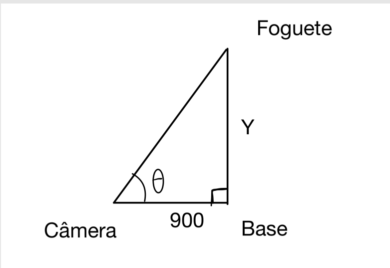
	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
sinal de f''	$+$	-	$+$
concavidade de f	cima	baixo	cima

(d) um esboço, sabendo ainda que f é função par, $y = 1$ é assíntota horizontal, $x = 1$ é assíntota vertical.

(0,75)



3. (2,0) Uma câmera de televisão está posicionada a 900 metros de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera varia de modo que a câmera se mantenha apontada na direção do foguete. Suponha que o foguete sobe verticalmente a uma velocidade 100 metros por segundo num instante em que já subiu 1200 metros. Quão rápido está variando o ângulo de elevação naquele momento?



Sejam

y: distância vertical (em metros) do foguete à base

θ : medida do ângulo de elevação (em radianos) que consideramos funções de t (tempo em segundos) deriváveis.

Queremos $\frac{d\theta}{dt}$ quando $y = 1200$ e $\frac{dy}{dt} = 100$.

Temos a relação

(0,5)

$$\tan\theta = \frac{y}{900}.$$

Derivando em t obtemos a relação entre taxas:

(0,5)

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{900}.$$

Para $y = 1200$, temos

(0,5)

$$\tan\theta = \frac{1200}{900} = \frac{4}{3}$$

e

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9},$$

donde

(0,5)

$$\begin{aligned} \frac{25}{9}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{100}{900} \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1/25 \quad (rad/s). \end{aligned}$$

4. (1,5) Corta-se um fio de 8 cm de comprimento em duas partes. Com uma das partes forma-se um quadrado e com a outra forma-se um círculo. Seja x o comprimento (em cm) da parte do fio destinada ao quadrado. Que comprimento deve ter cada parte de modo que a área total $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi}$ para $x \in [0,8]$ seja máxima?

Queremos maximizar a área total

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

para $x \in [0,8]$.

Temos

(0,5)

$$A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{(8-x)}{2\pi} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right)x - \frac{4}{\pi} = \left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right)x - \frac{4}{\pi}$$

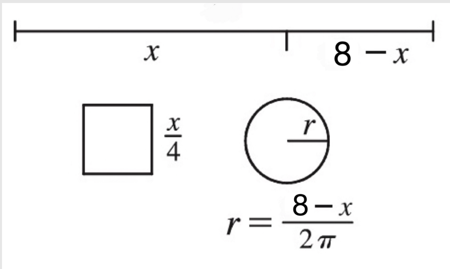
e

(0,5)

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ \left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right)x - \frac{4}{\pi} &= 0 \\ x &= \frac{32}{\pi+4} \end{aligned}$$

(0,5)

Comparando: $A(0) = 64/(4\pi) = 16/\pi \approx 5$, $A(8) = 64/16 = 4$ e $A(32/(\pi + 4)) \approx 2$. Logo, o máximo é obtido para $x = 0$ e todo o fio deverá ser utilizado no círculo.



Nota.

Como obter a fórmula da área total do enunciado? Leia em baixo.

A área do quadrado formado a partir da primeira parte do fio é

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16},$$

pois o quadrado terá lado $x/4$.

O comprimento da restante parte é $8 - x$. A área do círculo formado a partir da segunda parte fio é

$$\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

pois o círculo terá perímetro $2\pi r = 8 - x \Leftrightarrow r = (8 - x)/2\pi$.