

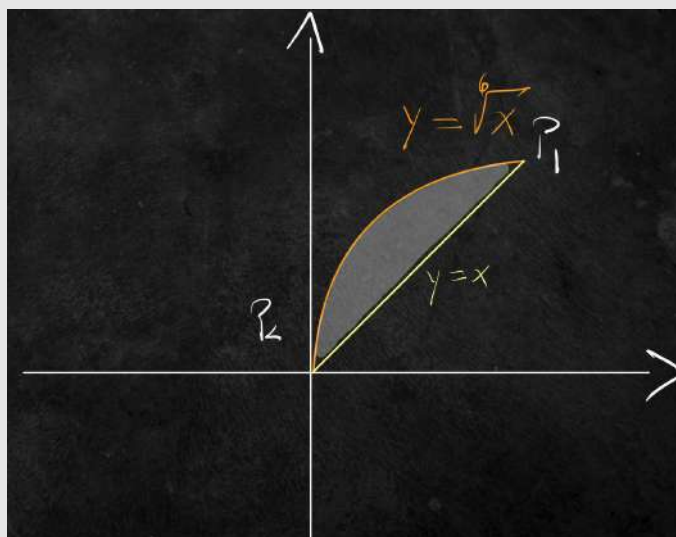
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 14/05/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Considere a região \mathcal{R} do plano delimitada por $y = \sqrt[6]{x}$ e $y = x$ e o sólido \mathcal{S} obtido rotacionando essa região em torno do eixo $x = 1$.

- (a) (1,0) Esboce a região \mathcal{R} e determine os dois pontos de interseção das curvas.

A região \mathcal{R} está esboçada em baixo



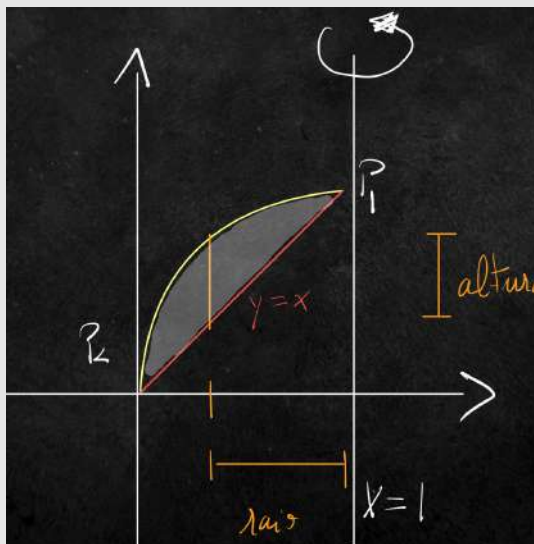
Pontos de interseção : P_1, P_2 assinalados acima.

$$\sqrt[6]{x} = x \Leftrightarrow x = x^6 \Leftrightarrow x^6 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$\begin{cases} P_2 = (0, 0) \\ P_1 = (1, 1) \end{cases}$$

- (b) (1,0) Escreva uma fórmula com integrais que permita calcular o volume de \mathcal{S} .
Não calcule a integral.

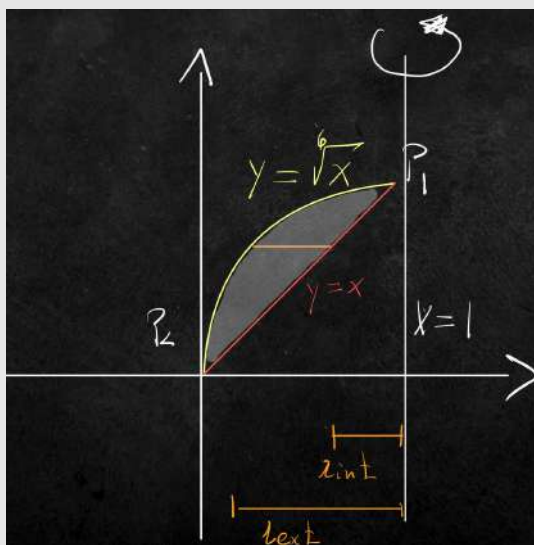
Método das cascas:



Uma casca ao nível $x \in [0, 1]$ tem altura $\sqrt{x} - x$ e raio $1 - x$.
 Portanto, o volume pretendido é dado por:

$$\int_0^1 2\pi(1-x)(\sqrt{x}-x)dx.$$

Método das fatias



Uma fatia ao nível $y \in [0, 1]$ é uma arruela com raio interior $1 - y$ e raio exterior $1 - y^6$ com área $A(y) = \pi(1 - y^6)^2 - \pi(1 - y)^2$

Portanto, o volume pretendido é dado por:

$$\int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 \pi(1 - y^6)^2 - \pi(1 - y)^2 dy.$$

2. Utilizando técnicas de integração, determine:

$$(a) (1,5) \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

(0,75)

$$\text{Substituindo } \begin{cases} u = \ln x \\ du = 1/x dx \\ x = e^2 \Rightarrow u = 2 \\ x = e^3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

(0,75)

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_2^3 u^{-1/2} du = 2u^{1/2} \Big|_2^3 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(b) (1,5) \int x^2 e^x dx$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &\stackrel{PP}{=} -2 \int x e^x dx + x^2 e^x \\ &\stackrel{PP}{=} -2 \left(- \int e^x dx + x e^x \right) + x^2 e^x \\ &= 2 \int e^x dx - 2x e^x + x^2 e^x \\ &= (2 - 2x + x^2) e^x + C \end{aligned}$$

$$(c) (2,0) \int \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+1})^3} dx$$

Solução 1

(1,5)

$$\text{Substituindo } \begin{cases} u = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = u - 1 \\ du = 2x dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+1})^3} dx = \int \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3} \cdot x dx = \int \frac{u-1}{u^{3/2}} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} - u^{-3/2} du \\ &= \frac{1}{2} \left(2u^{1/2} + 2u^{-1/2} \right) + C \end{aligned}$$

(0,5)

Voltando à variável x :

$$I = \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + C$$

Solução 2

(1,0)

$$\text{Substituindo } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \sqrt{x^2 + 1} = |\sec t| = \sec t \\ dx = \sec^2 t dt \end{cases}$$

$$I := \int \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\sec t} dt = \int \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \operatorname{sen} t dt$$

(1,0)

$$\text{Fazemos a substituição } \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\operatorname{sen} t dt \end{cases}$$

$$I = \int \frac{1 - u^2}{u^2} (-1) du = - \int u^{-2} - 1 du = - \left(-\frac{1}{u} - u \right) + C = (\sec t + \cos t) + C$$

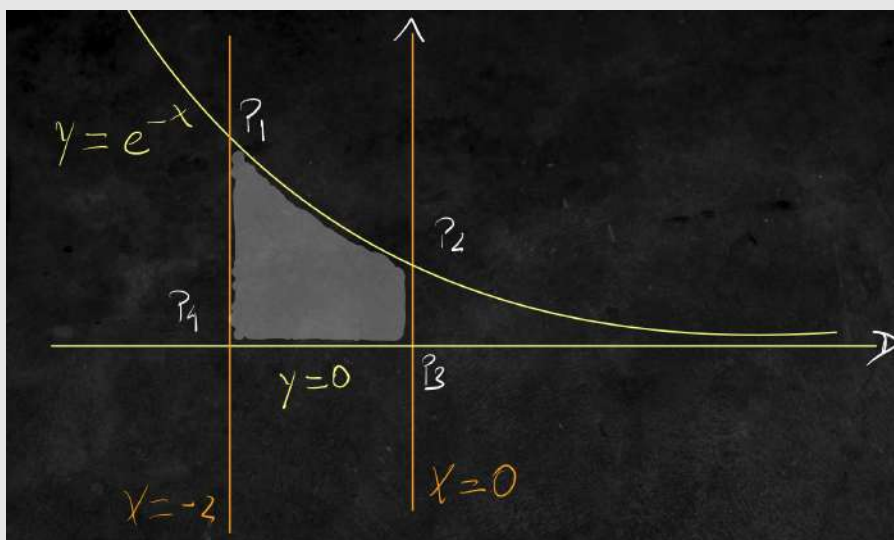
Voltando à variável x : como $x = \operatorname{tg} t$, então $x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t$ e $\sec t = \sqrt{x^2 + 1}$,
 $\cos t = 1/\sqrt{1 + x^2}$,

$$I = \left(\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) + C$$

3. Considere a região delimitada pelas curvas $y = e^{-x}$ e $x = 0$, $x = -2$ $y = 0$.

(a) (2,0) Esboce a região \mathcal{R} e determine os quatro pontos de interseção das curvas.

Esboço em baixo a sombreado



Interseções: são os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 acima representados. Temos:

$$\begin{cases} P_1 : y = e^{-x} \text{ e } x = -2 \Rightarrow P_1 = (-2, e^2) \\ P_2 : y = e^{-x} \text{ e } x = 0 \Rightarrow P_2 = (0, e^0) = (0, 1) \\ P_3 : y = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow P_3 = (0, 0) \\ P_4 : y = 0 \text{ e } x = -2 \Rightarrow P_4 = (-2, 0) \end{cases}$$

(b) (1,0) Calcule a área da região \mathcal{R} .

Trata-se de

$$\int_{-2}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-2}^0 = [e^{-x}]_0^{-2} = (e^2 - e^0) = e^2 - 1$$