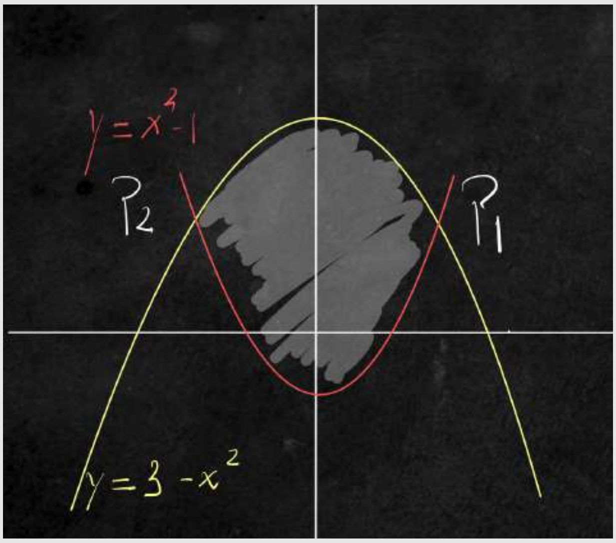
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 14/05/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Considere a região $\mathcal{R}$ do plano delimitada por $y = 3 - x^2$ e por $y = x^2 - 1$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido rotacionando essa região em torno do eixo $x = 2$.

   (a) (1,0) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine os pontos de interseção das curvas.

Trata-se da região do plano xy a sombreado



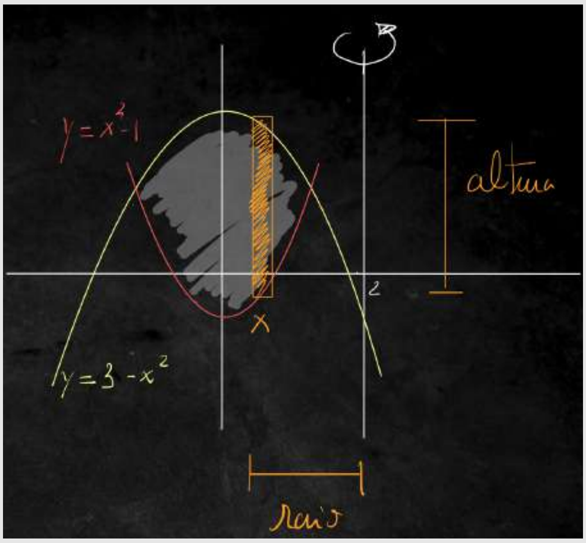
A interseção ocorre quando

$$x^2 - 1 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

de modo que $y = (\pm\sqrt{2})^2 - 1 = 1$. Os pontos de interseção são: $P_2 = (-\sqrt{2}, 1)$, $P_1 = (\sqrt{2}, 1)$.

   (b) (1,0) Escreva uma fórmula com integrais que permita calcular o volume de $\mathcal{S}$.
   Não calcule a integral.

Método das cascas



Uma casca cilíndrica ao nível $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ tem altura $3 - x^2 - (x^2 - 1) = 4 - 2x^2$ e raio $2 - x$.

Assim, volume de $\mathcal{S}$ é dado pela integral

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2\pi(2-x)\cdot(4-2x^2)dx$$

2. Utilizando técnicas de integração, determine:

(a) (1,5) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \ln(\text{sen } x)dx$ (Dica: faça $u = \ln(\text{sen } x)$).

(0,75)

$$\text{Substituindo} \begin{cases} u = \ln(\text{sen } x) \\ du = \cot x dx \\ x = \pi/4 \Leftrightarrow u = \ln(\sqrt{2}/2) = \ln(1/\sqrt{2}) = \ln(1) - \ln(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\ln 2 \\ x = \pi/2 \Leftrightarrow u = 0 \end{cases}$$

(0,75)

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \ln(\text{sen } x)dx = \int_{-\frac{1}{2}\ln 2}^{0} udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}\ln 2}^{0} = 0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)^2 = -\frac{1}{8}(\ln 2)^2$$

(b) (1,5) $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx$

Por paridade da função integranda, $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx$.

(0,75)

$$\text{Substituindo} \begin{cases} x = \text{sen } \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ dx = \cos \theta d\theta \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \text{sen }^2\theta} = |\cos \theta| = \cos \theta \qquad \text{donde} \\ x = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \\ x = \sqrt{3}/2 \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{3}/2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(0,75)

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = & \int_0^{\pi/3} \cos{}^2\theta d\theta \\ =& \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 1+\cos 2\theta d\theta \\ =& \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\text{sen }(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/3} \\ =& \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\text{sen }(2\pi/3)\right] \\ =& \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Portanto, o resultado pretendido é $2(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}$

(c) (2,0) $\int e^{2t}\cos tdt$

$$\begin{aligned} I := \int e^{2t}\cos tdt \overset{PP}{=} & -\int \frac{e^{2t}}{2}(-\text{sen } t)dt + \frac{e^{2t}}{2}\cos t \\ =& \frac{1}{2}\int e^{2t}\text{sen } tdt + \frac{e^{2t}}{2}\cos t \\ \overset{PP}{=} & \frac{1}{2}\left(-\int \frac{e^{2t}}{2}\cos tdt + \frac{e^{2t}}{2}\text{sen } t\right) + \frac{e^{2t}}{2}\cos t \\ =& -\frac{1}{4}\underbrace{\int e^{2t}\cos tdt}_{I} + \frac{e^{2t}}{4}\text{sen } t + \frac{e^{2t}}{2}\cos t\end{aligned}$$

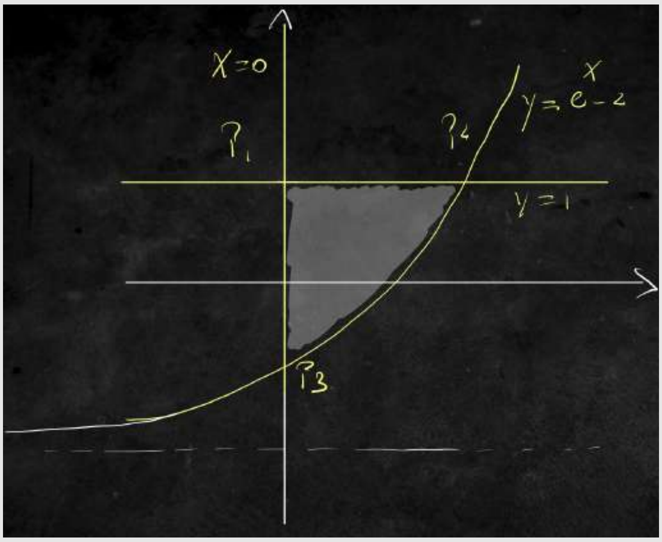
Assim $(1+\frac{1}{4})I = \frac{e^{2t}}{4}\text{sen } t + \frac{e^{2t}}{2}\cos t$,

$$I = \frac{e^{2t}}{5}(\text{sen } t + 2\cos t) + C$$

3. Considere a região $\mathcal{R}$ delimitada pelas curvas $y = 1$, $x = 0$, $y = e^x - 2$.

(a) (1,5) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine os pontos de interseção das curvas.

Em baixo a sombreado está o esboço



As interseções ocorrem nos pontos P_1, P_2, P_3 assinalados no esboço.
Temos $P_1 = (0, 1)$, pois $y = 1$ e $x = 0$.
Temos $P_3 = (0, -1)$, pois $x = 0$ e $y = e^x - 2$, logo $y = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$.
Finalmente, para obter as coordenadas de P_2, em que $y = e^x - 2$ e $y = 1$, note que $1 = e^x - 2 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$, donde $P_3 = (\ln 3, 1)$

(b) (1,5) Calcule a área da região $\mathcal{R}$.

Trata-se de

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ln 3} 1 - (e^x - 2)dx &= \int_0^{\ln 3} 3 - e^x dx \\
&= [3x - e^x]_0^{\ln 3} \\
&= 3\ln 3 - e^{\ln 3} - (0 - e^0) \\
&= 3\ln 3 - 3 + 1 \\
&= 3\ln 3 - 2.
\end{aligned}
$$