

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 21/05/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Calcule

(a) $(1,0) \int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz$

(0,5)

Substituindo $\begin{cases} u = e^z + z \\ du = e^z + 1 dz \\ z = 0 \Rightarrow u = 1 \\ z = 1 \Rightarrow u = 1 + e \end{cases}$

(0,5)

$$\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz = \int_1^{1+e} \frac{1}{u} du = [\ln |u|]_1^{1+e} = \ln(1 + e)$$

(b) $(1,5)$ uma equação da reta tangente à curva $\sqrt{x} + \ln y - y = 0$ no ponto de ordenada 1.

(0,75)

Para obter o declive, derivamos implicitamente com respeito a x

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{y}y' - y' &= 0 \\ \left(\frac{1}{y} - 1\right)y' &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Para $y = 1$, temos $\sqrt{x} + \ln 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ e obtemos $0y' = -1/2$. Como não há nenhum número real que multiplicado por 0 dê $-1/2$, a reta tangente em $(1, 1)$ é vertical ou não existe. Em qualquer caso, não pode ser calculada pensando y como função de x

(0,75)

Pensando x como função de y e derivando implicitamente com respeito a y obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}}x' + \frac{1}{y} - 1 &= 0 \\ x' &= \left(1 - \frac{1}{y}\right)2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Para $y = 1$, temos $x' = 0$, logo a reta é

$$x - 1 = x'(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

(c) (1,0) $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - x^7) - \ln(1 - x^5)]$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(1 - x^7) - \ln(1 - x^5)] \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{1 - x^7}{1 - x^5} = \ln \frac{7}{5},$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^7}{1 - x^5} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-7x^6}{-5x^4} = \frac{7}{5}$$

(d) (2,0) $\int x^5 e^{-x^2} dx$

(0,5)

Substituindo

$$\begin{cases} u = -x^2 \\ du = -2x dx \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^2} dx = \int x^4 e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int u^2 e^u du$$

Como

(1,0)

$$\begin{aligned} \int u^2 e^u du &\stackrel{PP}{=} -2 \int u e^u du + u^2 e^u \\ &\stackrel{PP}{=} -2 \left(-\int e^u du + u e^u \right) + u^2 e^u \\ &= (2 - 2u + u^2) e^u + C \end{aligned}$$

então

(0,5)

$$\int x^5 e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} (2 + 2x^2 + x^4) + A$$

2. (1,5) Determine, se existirem, os valores máximo e mínimo da função $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, com $x \in [0, 1]$.

(0,5)

Pelo TFC, temos $f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2}$, para todo $x \in [0, 1]$.

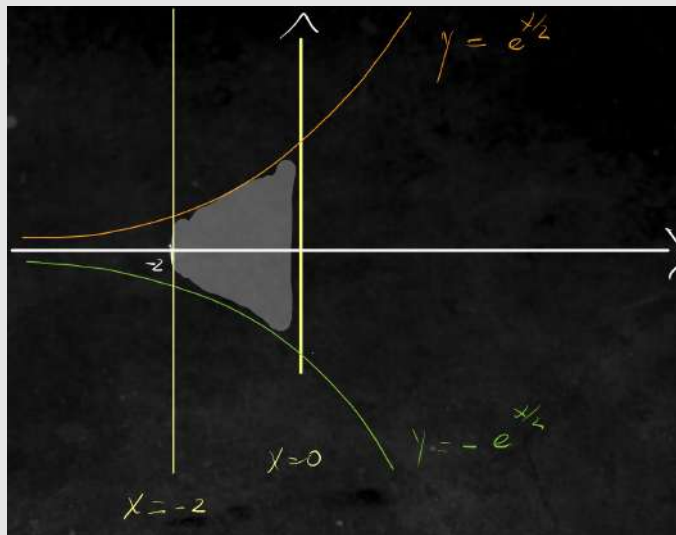
(0,5) Assim, como $f'(x) = e^{-x^2} > 0$ em $[0, 1]$, f é crescente em $[0, 1]$ (pelo Teste C/D) e o valor máximo é $f(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt$ atingindo no extremo direito do intervalo.

(0,5) Pela mesma razão, o valor mínimo de f é atingido no extremo esquerdo do intervalo e vale $f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$.

3. Considere a região \mathcal{R} delimitada pelas curvas $x = \ln(y^2)$, $x = -2$ e $x = 0$ e o sólido \mathcal{S} obtido pela rotação da região \mathcal{R} em torno de $x = 0$.

(a) (1,5) Escreva uma integral que represente o volume do sólido \mathcal{S} utilizando fatiamento e outra integral que utilize o método das cascas.

Esboço da região



Note que $x = \ln(y^2) \Leftrightarrow y^2 = e^x \Leftrightarrow |y| = e^{x/2} \Leftrightarrow y = e^{x/2}$ ou $y = -e^{x/2}$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$

$x = -2 \Rightarrow y = 1/e$ ou $y = -1/e$

(0,75)

Método das fatias: uma fatia ao nível $y \in [0, 1/e]$ é um disco de raio 2 e área $A(y) = 4\pi$; uma fatia ao nível $y \in [1/e, 1]$ é um disco de raio $\ln(y^2)$ e área $A(y) = \pi[\ln(y^2)]^2$. Por simetria, o volume pretendido é

$$2 \int_0^1 A(y) dy = 2 \int_0^{1/e} 4\pi dy + 2 \int_{1/e}^1 \pi[\ln(y^2)]^2 dy$$

(0,75)

Método das cascas: uma casca ao nível $x \in [-2, 0]$ tem altura $e^{x/2} - (-e^{x/2}) = 2e^{x/2}$ e raio $-x$. Assim o volume pretendido é

$$\int_{-2}^0 2\pi(-x)2e^{x/2} dx$$

(b) (1,5) Calcule o volume de \mathcal{S} por um dos métodos de (a).

Calculamos $I = \int_{-2}^0 2\pi(-x)2e^{x/2} dx = -4\pi \int_{-2}^0 xe^{x/2} dx$

(0,5)

Substituindo

$$\begin{cases} u = x/2 \\ du = \frac{1}{2}dx \\ x = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ x = -2 \Leftrightarrow u = -1 \end{cases}$$

donde

(1,0)

$$\begin{aligned} I &= -4\pi \int_{-1}^0 2ue^u 2du = +16\pi \int_0^{-1} ue^u du \\ &= +16\pi \left(- \int_0^{-1} e^u du + [ue^u]_0^{-1} \right) \\ &= +16\pi \left(+ \int_{-1}^0 e^u du - 1/e \right) \\ &= +16\pi \left([e^u]_{-1}^0 - 1/e \right) \\ &= 16\pi(1 - 1/e - 1/e) \\ &= 16\pi \frac{e - 2}{e} \end{aligned}$$