

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 21/05/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Calcule

(a) (1,5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\ln x + (x-1)/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) (1,0) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

(0,5)

Substituindo $\begin{cases} u = 1/x \\ du = -1/x^2 dx \\ x = 1 \Leftrightarrow u = 1 \\ x = 2 \Leftrightarrow u = 1/2 \end{cases}$

(0,5)

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = - \int_1^{1/2} e^u du = [e^u]_{1/2}^1 = e - \sqrt{e}$$

(c) (1,5) uma equação da reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{4}{y^3}$ no ponto $(9, 1)$

(1,0)

Para obter o declive, derivamos implicitamente com respeito a x

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = -\frac{12}{y^4}y'$$
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{12}{y^4}\right)y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(0,5)

Para $y = 1$, $x = 9$, $(1/2 + 12)y' = -1/6$, donde $y' = -1/75$ e a reta pretendida é

$$y - 1 = -1/75(x - 9)$$

(d) (2,0) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}} dx$

(0,5)

Substituindo

$$\begin{cases} x+1 = \sin t, t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-(x+1)^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{cases}$$

(1,0)

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}} dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t + C \end{aligned}$$

(0,5)

Voltando à variável x

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsen(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{1-(x+1)^2} + C$$

2. (2,0) Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem. (Use os métodos aprendidos na disciplina de Cálculo I).

(1,0)

Sejam (x, y) as coordenadas do ponto que procuramos. Queremos minimizar $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sujeito à restrição $y = 2x + 3$, obtendo a função a minimizar $d(x) = \sqrt{x^2 + (2x+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Note que minimizar d equivale a minimizar

$$f(x) = d^2(x) = x^2 + (2x+3)^2$$

pois: $0 \leq d(x_0) \leq d(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se e somente se $d^2(x_0) \leq d^2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(0,5)

Temos $f'(x) = 2x + 2(2x + 3) = 10x + 12$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6/5$

(0,5)

Note que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -6/5$ e $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -6/5$, que permite concluir que f atinge valor mínimo global para $x = -6/5$, pelo Teste da 1ª Derivada para Extremos Globais). A ordenada correspondente é $y = 2(-6/5) + 3 = 3/5$.

Nota: dá para resolver o exercício sem os métodos de Cálculo 1?

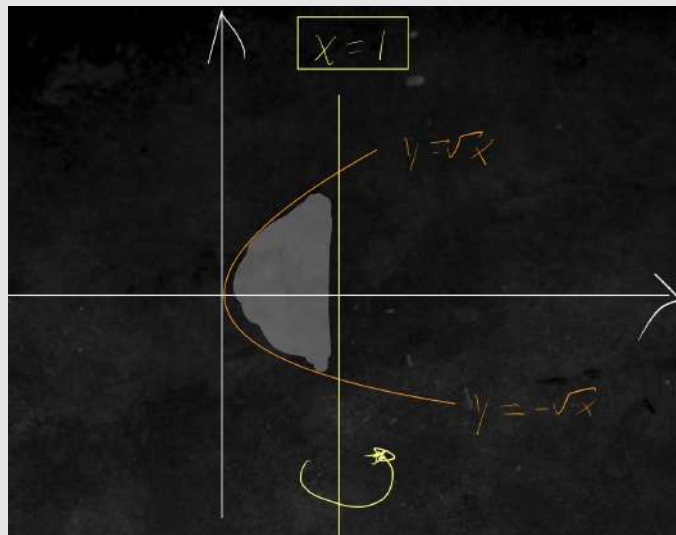
Sim, basta observar que $f(x) = x^2 + (4x^2 + 12x + 9) = 5x^2 + 12x + 9$ tem como gráfico uma parábola com coeficiente $5 > 0$ atingindo o mínimo na abcissa x_v do vértice da parábola. Completando quadrados, achamos a abcissa do vértice da parábola que $x_v = -6/5$.

O exercício também pode ser resolvido se souber que o ponto pretendido se trata do pé da perpendicular a $y = 2x + 3$ que passa origem.

3. Considere a região \mathcal{R} delimitada pelas curvas $x = y^2$, $x = 1$ e o sólido \mathcal{S} obtido pela rotação da região \mathcal{R} em torno de $x = 1$.

- (a) (1,0) Escreva uma integral que represente o volume do sólido \mathcal{S} utilizando fatiamento e outra integral que utilize o método das cascas.

Esboço de \mathcal{R}



Note que $x = y^2 \Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$

(0,5)

Método das fatias: uma fatia ao nível $y \in [-1, 1]$ é um disco de raio $1 - y^2$ e área $A(y) = \pi(1 - y^2)^2$; o volume pretendido é

$$\int_{-1}^1 A(y) dy = \int_{-1}^1 \pi(1 - y^2)^2 dy$$

(0,5)

Método das cascas: uma casca ao nível $x \in [0, 1]$ tem altura $\sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$ e raio $1 - x$. Assim o volume pretendido é

$$\int_0^1 2\pi(1-x)2\sqrt{x}dx$$

(b) (1,0) Calcule o volume de \mathcal{S} por um dos métodos de (a).

Por simetria,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \pi(1-y^2)^2 dy &= 2\pi \int_0^1 (1-2y^2+y^4) dy \\ &= 2\pi \left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{16\pi}{15}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\pi(1-x)2\sqrt{x}dx &= 4\pi \int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2}) dx \\ &= 4\pi \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{16\pi}{15}\end{aligned}$$