

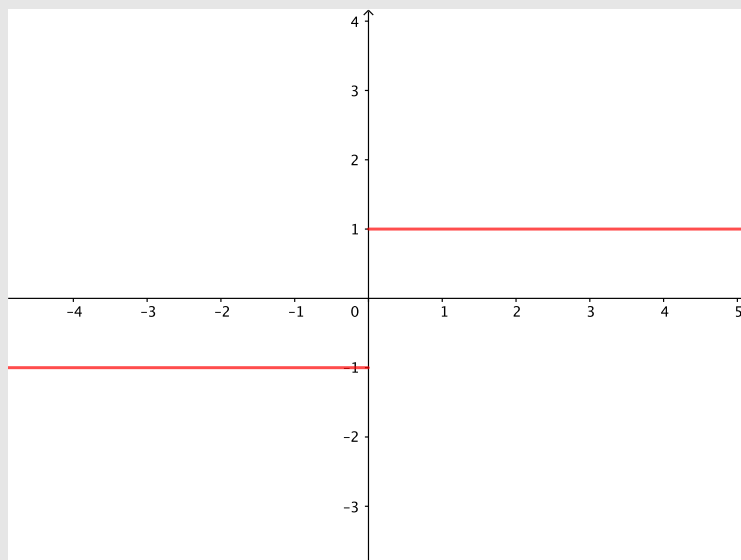
Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática - CCE  
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 19/07/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Esboce o gráfico de uma função  $f$  que satisfaça as seguintes condições:

- 0,5 (a)  $y = 1$  é assíntota horizontal de  $f$   
0,5 (b)  $f$  seja descontínua em 0  
0,5 (c)  $f$  seja função ímpar.

Por exemplo



2. Seja  $f(x) = \ln(1 + \pi \arctan x)$ . Determine:

- a) o domínio de  $f$

(0,75)

Para que  $f(x) = \ln(1 + \pi \arctan x)$  esteja bem definida como número real, deve ser satisfeita a condição:

$$1 + \pi \arctan x > 0$$

$$\pi \arctan x > -1$$

$$\arctan x > -\frac{1}{\pi}$$

$$\tan(\arctan x) > \tan\left(-\frac{1}{\pi}\right); \quad \tan x \text{ é função crescente}$$

$$x > -\tan\left(\frac{1}{\pi}\right); \quad \tan x \text{ é ímpar}$$

Observe que a função  $\arctan$  é definida para todo número real. Logo  $D_f = \left(-\tan\left(\frac{1}{\pi}\right), +\infty\right)$

b)  $f^{-1}(x)$ , se existir

(0,75)

Se  $x = \ln(1 + \pi \arctan y) \Rightarrow e^x = 1 + \pi \arctan y \Rightarrow e^x - 1 = \pi \arctan y \Rightarrow \frac{1}{\pi}(e^x - 1) = \arctan y \Rightarrow \tan\left(\frac{1}{\pi}(e^x - 1)\right) = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \tan\left(\frac{1}{\pi}(e^x - 1)\right)$  é a função inversa de  $f$ .

c) Determine se existe assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

(1,0)

Para determinar se existe assíntota horizontal quando  $x \rightarrow \infty$  será calculado o limite da função quando  $x$  tende a  $+\infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \pi \arctan x) \\ &= \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \pi \arctan x\right); \quad \ln \text{ é contínua no seu domínio} \\ &= \ln\left(1 + \pi \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x\right); \quad \text{propriedades de limite de funções} \\ &= \ln\left(1 + \pi \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Portanto a reta  $y = \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{2}\right)$  é assíntota horizontal de  $f$ .

Observação: como o domínio de  $f$  é o intervalo  $\left(-\tan\left(\frac{1}{\pi}\right), +\infty\right)$ , não faz sentido calcular o limite da função quando  $x$  tende  $-\infty$ .

3. Determine, se existirem:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a| + x^2 - 2ax + a^2}{a - x}$

(1,5)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a| + x^2 - 2ax + a^2}{a-x} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a| + (x-a)^2}{a-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a|}{a-x} + \frac{(x-a)^2}{-(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a|}{a-x} - (x-a); x \neq a\end{aligned}$$

Calculando os limites laterais da função:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{a-x} - (x-a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{a-x} - (x-a); x > a \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} -1 - (x-a); x \neq a \\ &= -1 - (a-a) \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x-a|}{a-x} - (x-a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)}{a-x} - (x-a); x < a \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} 1 - (x-a); x \neq a \\ &= 1 - (a-a) \\ &= 1\end{aligned}$$

Como os limites laterais da função quando  $x$  tende a  $a$ , são diferentes, então não existe o limite de  $f$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^2 \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2 - 3x\sqrt{x^3}}$

(1,0)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^2 \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2 - 3x\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^{5/2} - x^{1/2}}{x^2 - 3x^{5/2}}; x > 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{5/2}(\pi - x^{-2})}{x^{5/2}(x^{-1/2} - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - x^{-2}}{x^{-1/2} - 3}; x \neq 0 \\ &= \frac{\pi - \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/2} - 3} \\ &= \frac{\pi - 0}{0 - 3} \\ &= -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

4. Use a definição de derivada para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto  $(4, 2)$ .

(1,5)

Por definição de derivada:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} ; x > 0, x \neq 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Sendo  $f'(4)$  o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(4, 2)$ , então a equação da reta é da forma:  $y - 2 = f'(4)(x - 4) = \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} - 1$  ou  $4y - x - 4 = 0$

5. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} + a, & x < -1 \\ (x+1) \operatorname{sen} \frac{1}{x+1} - 2, & -1 < x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{b-bx}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Determine, se existirem,  $a, b$  tais que  $f$  seja contínua em 0 e exista  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

(2,0)

Analisando as condições para  $f$  ser contínua em 0. Primeiramente  $f(0) = -\frac{1}{b}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{b - bx} \\ &= \frac{0 - 1}{b - 0} \\ &= -\frac{1}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) \operatorname{sen} \frac{1}{x+1} - 2 \\ &= (0+1) \operatorname{sen} \frac{1}{0+1} - 2 \\ &= \operatorname{sen} 1 - 2 \end{aligned}$$

Para  $f$  ser contínua em 0, os limites laterais de  $f$ , quando  $x$  tende a 0, e  $f(0)$  devem ser iguais, logo:  $-\frac{1}{b} = \text{sen } 1 - 2$ . Daí,  $b = \frac{1}{2 - \text{sen } 1}$ .

Agora analisando as condições para a existência de  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} + a \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} + a ; x \neq -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 1}{1} + a \\ &= -2 + a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) \text{sen } \frac{1}{x + 1} - 2$$

A função seno é limitada para todo  $x \neq -1$ :  $-1 \leq \text{sen } \frac{1}{x+1} \leq 1$  e  $x > -1$ , isto é,  $x + 1 > 0$ , logo ao multiplicar com o fator positivo  $(x + 1)$  na desigualdade anterior, temos:

$$-1 \cdot (x + 1) \leq (x + 1) \text{sen } \frac{1}{x + 1} \leq 1 \cdot (x + 1)$$

$$-(x + 1) \leq (x + 1) \text{sen } \frac{1}{x + 1} \leq x + 1$$

Como o limite das funções que estão nos extremos da desigualdade são iguais:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} -(x + 1) = -0 = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1$ , o Teorema do Confronto garante que

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) \text{sen } \frac{1}{x + 1} = 0$ . Daí concluímos que,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) \text{sen } \frac{1}{x + 1} - 2 = 0 - 2 = -2.$$

Para a existência do limite, os limites laterais devem ser iguais, logo:  $-2 + a = -2$ , isto é,  $a = 0$ .