Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 19/07/21 (tarde)

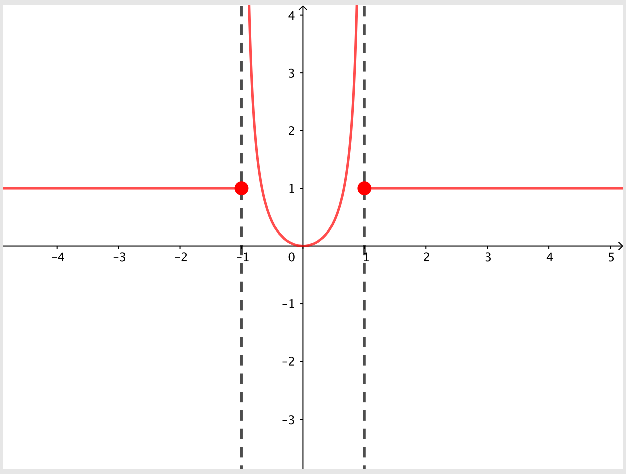
Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1,5 1. Esboce um gráfico de uma função f que satisfaça as três condições:

$x = 1$ é assíntota vertical de f

f seja contínua à direita em 1

f seja função par.



2. Determine, se existirem:

1,5 (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^2 \cos x + \sqrt{x}}{1 + 7x - 3x^2} \cdot \dfrac{1}{x}$

(1,0)

Multiplicando as frações e dividindo por x^3 no numerador e no denominador

$$\frac{x^3 - x^2 \cos x + \sqrt{x}}{1 + 7x - 3x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^3 - x^2 \cos x + \sqrt{x}}{x + 7x^2 - 3x^3}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{x} \cos x + \frac{1}{x^{5/2}}}{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x} - 3} \to \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

quando $x \to \infty$.

(0,5)

Nota: no cálculo acima, usamos que $\frac{1}{x} \cos x \to 0$, quando $x \to \infty$, o que decorre do Teorema do Confronto, uma vez que $\lim_{x\to\infty} \pm\frac{1}{x} = 0$ e $-1/x \leq 1/x \cos x \leq 1/x$, para todo $x > 0$.

1,5 (b) $\lim_{x\to a} e^{\frac{|x-a|-2|a-x|}{(x-a)^2}}$

Analisaremos os limites laterais. Note

$$\frac{|x-a| - 2|a-x|}{(x-a)^2} \overset{|A|=|-A|}{=} \frac{-|x-a|}{(x-a)^2} = \begin{cases} -\frac{x-a}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a}, & x > a \\ -\frac{a-x}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a}, & x < a. \end{cases}$$

(0,75)

Assim, por continuidade da exponencial,

$$\lim_{x\to a^+} e^{\frac{|x-a|-2|a-x|}{(x-a)^2}} = e^{\lim_{x\to a^+} -\frac{1}{x-a}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

e

(0,75)

$$\lim_{x\to a^-} e^{\frac{|x-a|-2|a-x|}{(x-a)^2}} = e^{\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0.$$

Portanto, o limite pretendido é 0.

1,5 3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

Determine $\lim_{x\to 0} f(x)$, se existir e justifique se f é contínua em 0.

Temos

(0,5)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

(0,5)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = e^{\lim_{x\to 0^+} -1/x} = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0.$$

(0,5) Como, também $f(0) = 0$, concluímos que f é contínua em 0.

4. Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{x^3 - \pi}\right)$. Determine:

1,0 a) o domínio de f

A expressão $\operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{x^3 - \pi}\right)$ está definida quando

$$\begin{aligned}
-1 \leq& \sqrt[3]{x^3 - \pi} \leq 1 & \\
-1 \leq& x^3 - \pi \leq 1 & \text{"elevar ao cubo mantém as desigualdades"} \\
\pi - 1 \leq& x^3 \leq \pi + 1 & \\
\sqrt[3]{\pi - 1} \leq& x \leq \sqrt[3]{\pi + 1} & \text{"tirar a raiz cúbica mantém as desigualdades"}
\end{aligned}$$

Portanto, o domínio de f é $[\sqrt[3]{\pi - 1}, \sqrt[3]{\pi + 1}]$

1,0 b) $f^{-1}(x)$, se existir

Dado $y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{x^3 - \pi}\right) &= y \\
\sqrt[3]{x^3 - \pi} &= \operatorname{sen} y \\
x^3 - \pi &= \operatorname{sen}^3 y \\
x^3 &= \operatorname{sen}^3 y + \pi \\
x &= \sqrt[3]{\operatorname{sen}^3 y + \pi},
\end{aligned}$$

donde $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^3 x + \pi}$, para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2,0 5. Seja $f(x) = |x|\sqrt{|x|}$. Determine

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{f(x)}{x - 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

e decida se existem $f'(0)$ e $f'(1)$.

Temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$$

Analisamos os limites laterais.

(0,5)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

(0,5)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{-x} = 0$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Temos

(0,75)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) &= = \lim_{x\to 1} \frac{|x|\sqrt{|x|}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}; \quad x > 0 \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(x-1)(\sqrt{x^3}+1)}; \quad \text{conjugado} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^3}+1)}; \quad \text{dividindo } x^3-1 \text{ por } x-1 \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3}+1} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(0,25)

Finalmente, note:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

e

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{3}{2}.$$