Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 27/08/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

1,0 (a) $f'(x)$, onde $f(x) = \frac{x^a \cdot \cos \pi x}{(x^2+1)^2}$ e a é uma constante e simplifique.

(0,8)

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^2(x^a \cos \pi x)' - x^a \cos(\pi x) \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(x^2+1)^2(ax^{a-1} \cos \pi x - x^a \pi \operatorname{sen} \pi x) - x^a \cos(\pi x)(2(x^2+1)(2x))}{(x^2+1)^4}$$

(0,2)
Simplificando o fator x^2+1, obtemos

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(ax^{a-1} \cos \pi x - x^a \pi \operatorname{sen} \pi x) - 4x^{a+1} \cos \pi x}{(x^2+1)^3}$$

OBS: ainda podemos colocar em evidência o fator x^{a-1} no numerador.

$$f'(x) = x^{a-1} \frac{(x^2+1)(a \cos \pi x - x\pi \operatorname{sen} \pi x) - 4x^2 \cos \pi x}{(x^2+1)^3}$$

1,5 (b) a equação da reta tangente à curva $x^y = y^{2x+1}$ no ponto de abcissa 1.

(1,0)

Aplicando logaritmos e derivando implicitamente na variável x

$$
\begin{aligned}
(y \ln x)' &= ((2x+1)\ln y)' \\
y' \ln x + \frac{y}{x} &= 2\ln y + (2x+1)\frac{y'}{y} \\
y'\left(\ln x - \frac{2x+1}{y}\right) &= 2\ln y - \frac{y}{x} \\
y' &= \frac{2\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{2x+1}{y}}
\end{aligned}
$$

(0,5)

Para $x = 1$, temos $1 = y^3$, $y = 1$ e $y' = 1/3$, donde $y - 1 = 1/3(x-1)$ é uma equação da reta tangente pretendida.

1,5 (c) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x} \overset{\frac{0}{0}}{=}_H \lim_{x\to 1} \frac{-1 + 1/x}{-\pi \sin \pi x} \overset{\frac{0}{0}}{=}_H \lim_{x\to 1} \frac{-1/x^2}{-\pi^2 \cos \pi x} = -\frac{1}{\pi^2}$$

2. Considere uma função f par de domínio $\mathbb{R}$ cujo gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, -10)$ e intercepta o eixo x para $x = 2$. Além disso, conhece-se sua derivada $f'(x) = x(4 - x^2)^2$. Acerca da função f, determine:

1,0 (a) os intervalos onde é crescente/decrescente

$f'(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $(4 - x^2)^2 = 0$, i.e., $x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.
O sinal de f' é o sinal do fator x, pois$(4 - x^2)^2 \geq 0$.
Resumo do estudo do sinal de f' e dos intervalos de monotonia:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
sinal de f'	-	-	+	+
monotonia de f	decrescente	decrescente	crescente	crescente

OBS: como f tem derivada em todo o número real, então f é contínua em $\mathbb{R}$ e podemos afirmar que f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e é crescente em $(0, \infty)$.

1,5 (b) os intervalos de concavidade para cima/baixo

(0,75)

$$
\begin{aligned}
f''(x) = (x(4-x^2)^2)' &= (4-x^2)^2 + x \cdot 2 \cdot (4-x^2)(-2x) \\
&= (4-x^2)((4-x^2) - 4x^2) \\
&= (4-x^2)(4-5x^2)
\end{aligned}
$$

$f''(x) = 0$ quando $4 - x^2 = 0$ ou $4 - 5x^2 = 0$, ou seja, $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = -2/\sqrt{5}$ ou $x = 2/\sqrt{5}$. Nota $2/\sqrt{5} \simeq 0,89$.

(0,75)

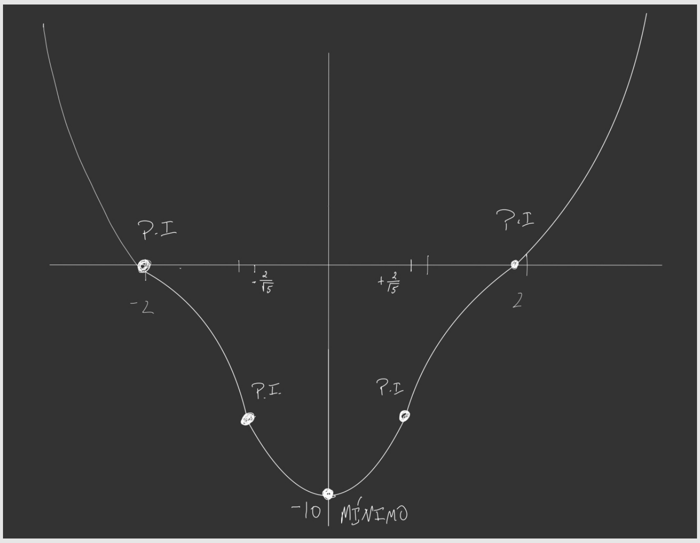
O sinal de f'' depende do sinal dos fatores $4 - x^2$ e $4 - 5x^2$ que são positivas entre os zeros e negativas caso contrário. Em baixo está um resumo junto com a concavidade de f:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -2/\sqrt{5})$	$(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$	$(2/\sqrt{5}, 2)$	$(2, \infty)$
$4 - x^2$	-	+	+	+	-
$4 - 5x^2$	-	-	+	-	-
sinal de f''	+	-	+	-	+
concavidade de f	cima	baixo	cima	baixo	cima

1,0 (c) um esboço indicando explicitamente extremos e pontos de inflexão, caso existam.

Das partes anteriores, concluímos que existe um único extremo. É o valor mínimo $-10 = f(0)$. Também concluímos que é global. Há exatamente quatro pontos de inflexão: $(-2, 0)$ e $(2, 0)$, $(-2/\sqrt{5}, f(-2/\sqrt{5}))$, $(2/\sqrt{5}, f(2/\sqrt{5}))$.

Exemplo



1,5 3. Dois resistores com resistências R_1, R_2 estão conectados em paralelo e a resistência total R, medida em ohms (Ω) é dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Se R_1 está aumentando a uma taxa de $0,1\ \Omega$/s e R_2 está diminuindo a uma taxa de $0,2\ \Omega$/s, quão rápido está variando R nesse instante quando $R_1 = 50\Omega$ e $R_2 = 100\Omega$.

(0,75)

Queremos $\frac{dR}{dt}$ quando $R_1 = 50$, $R_2 = 100$ e temos $\frac{dR_1}{dt} = 0,1$, $\frac{dR_2}{dt} = -0,2$.

Reescrevendo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

e derivando com respeito a t

$$\begin{aligned} -R^{-2}\frac{dR}{dt} &= -R_1^{-2}\frac{dR_1}{dt} - R_2^{-2}\frac{dR_2}{dt} \\ \frac{dR}{dt} &= \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \frac{dR_1}{dt} + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 \frac{dR_2}{dt} \end{aligned}$$

(0,75)

Para $R_1 = 50$, $R_2 = 100$, segue que $1/R = 1/50 + 1/100$ ou seja $R = 100/3$. Donde R está variando a uma taxa de

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \left(\frac{100/3}{50}\right)^2 \cdot 0,1 + \left(\frac{100/3}{100}\right)^2 \cdot (-0,2) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{10} \\ &= \frac{4}{90} - \frac{2}{90} \\ &= \frac{2}{90} \\ &= \frac{1}{45} \quad (\Omega/s) \end{aligned}$$

1,0 4. Decida se a afirmação "se f é uma função par, então f' é uma função ímpar " é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, justifique, e, caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

Verdadeira.

Primeiro, uma observação: do enunciado assumimos que f é derivável em qualquer número x no domínio, digamos D, e esse domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faça sentido falar em função par, como por exemplo $(-1,1)$, $\mathbb{R}$ etc

Seja f uma função par: $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D$. Assim, pela Regra da Cadeia:

$$f'(x) = [f(-x)]' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

para todo $x \in D$, o que significa que f' é uma função ímpar.