Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 27/08/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

1,0 (a) $f'(x)$, onde $f(x) = \frac{x \cdot \tan x}{(x^a+1)^2}$ e a é uma constante e simplifique

(0,8)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^a+1)^2(x\tan x)' - (x\tan x)((x^a+1)^2)'}{(x^a+1)^4} \\ &= \frac{(x^a+1)^2(\tan x + x\sec^2 x) - (x\tan x)2(x^a+1)ax^{a-1}}{(x^a+1)^4} \end{aligned}$$

(0,2)
Simplificando o fator $x^a + 1$, obtemos

$$f'(x) = \frac{(x^a+1)(\tan x + x\sec^2 x) - 2ax^a\tan x}{(x^a+1)^3}$$

1,5 (b) a equação da reta tangente à curva $y^x = x^{2y+1}$ no ponto de ordenada 1

(1,0)
Aplicando logaritmos e derivando implicitamente na variável x

$$\begin{aligned} (x\ln y)' &= ((2y+1)\ln x)' \\ 1\ln y + x\frac{y'}{y} &= 2y'\ln x + (2y+1)\frac{1}{x} \\ y'\left(\frac{x}{y} - 2\ln x\right) &= \frac{2y+1}{x} - \ln y \\ y' &= \frac{\frac{2y+1}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - 2\ln x} \end{aligned}$$

(0,5)

Para $y = 1$, temos $1 = x^3$, $x = 1$ e $y' = 3$, donde $y - 1 = 3(x - 1)$ é uma equação da reta tangente pretendida.

1,5 (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{x}{m} - \cos nx}{x^2}$, onde m, n são constantes positivas .

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{m} - \cos nx}{x^2} &\overset{\frac{0}{0}}{=}_H \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{m}\text{ sen }\frac{x}{m} + n\text{ sen } nx}{2x}\\
&\overset{\frac{0}{0}}{=}_H \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{m^2}\cos\frac{x}{m} + n^2\cos nx}{2}\\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{m^2} + n^2)\\
&= \frac{n^2m^2 - 1}{2m^2}
\end{aligned}$$

2. Considere uma função positiva f de domínio $\mathbb{R}$ que cujo gráfico contém o ponto $(0, 2)$. Além disso, conhece-se sua derivada $f'(x) = (x - 1)(x - 3)^2$. Acerca da função f, determine:

1,0 (a) os intervalos onde é crescente/decrescente

$f'(x) = 0$ quando $x - 1 = 0$ ou $(x - 3)^2 = 0$, i.e., $x = 1$ ou $x = 3$.
O sinal de f' é o sinal do fator $x - 1$, pois $(x - 3)^2 \geq 0$.
Resumo do estudo do sinal de f' e dos intervalos de monotonia:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
sinal de f'	-	+	+
monotonia de f	decrescente	crescente	crescente

OBS.: como f é contínua em $\mathbb{R}$, pois tem derivada em todo o número real, então podemos afirmar que f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e é crescente em $(1, \infty)$.

1,5 (b) os intervalos de concavidade para cima/baixo

(0,75)

$$\begin{aligned}
f''(x) = ((x - 1)(x - 3)^2)' &= (x - 3)^2 + (x - 1)2(x - 3)\\
&= (x - 3)(x - 3 + 2(x - 1))\\
&= (x - 3)(3x - 5)
\end{aligned}$$

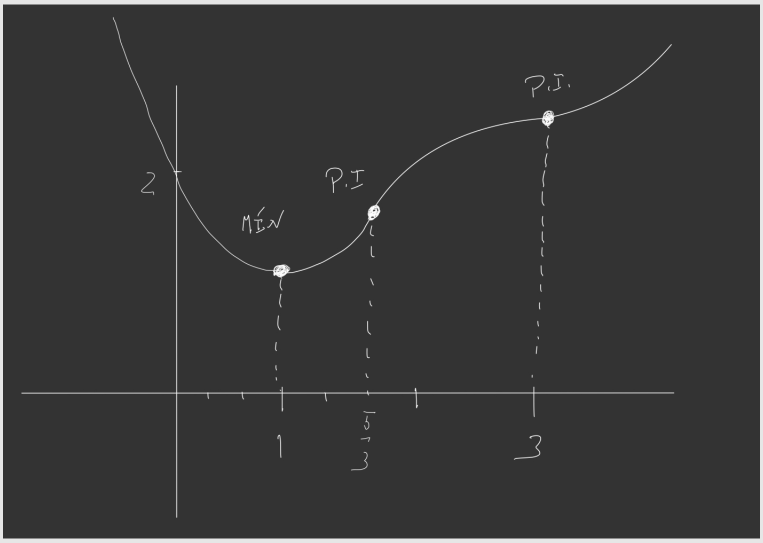
$f''(x) = 0$ quando $x - 3 = 0$ ou $3x - 5 = 0$, i.e., $x = 3$ ou $x = 5/3$
(0,75)
Resumo do estudo do sinal de f'' e concavidade de f:

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x-3$	-	-	+
$3x-5$	-	+	+
sinal de f''	+	-	+
concavidade de f	cima	baixo	cima

1,0 (c) um esboço indicando explicitamente extremos e pontos de inflexão, caso existam.

Das partes anteriores existe um único mínimo $f(1)$ e únicos pontos de inflexão são $(5/3, f(5/3))$, $(3, f(3))$.

Exemplo



1,5 3. Se uma bola de neve esférica derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 2 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro varia quando o raio é 20 cm.

Sejam

r : o raio em cm

x: o diâmetro em cm

S : a área da superfície esférica em cm^2

que consideramos funções de t (tempo em minutos) e deriváveis.

Queremos $\frac{dx}{dt}$ quando $x = 2 \cdot 20 = 40$ (o dobro do raio) e $\frac{dS}{dt} = -2$.

Temos a relação

$$S = 4\pi r^2 = \pi(2r)^2 = \pi x^2.$$

Derivando em t obtemos a relação entre taxas:

(1,0)

$$\frac{dS}{dt} = \pi 2x \frac{dx}{dt}$$

(0,5)

Substituindo os dados, $-2 = \pi \cdot 80 \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1/(40\pi)$.

(O diâmetro decresce a uma taxa de $1/(40\pi)$ cm/min.)

1,0 4. Decida se a afirmação "uma função polinomial de grau 3 não pode ter três extremos locais (distintos)" é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, justifique, e, caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

Verdadeira.

Suponhamos que f tem três extremos locais, digamos $x_1 < x_2 < x_3$. Como f é polinomial, f é derivável e pelo Teorema de Fermat, x_1, x_2, x_3 são três zeros distintos de f'. Por outro lado, f' é também função polinomial de, no máximo, grau 2, e, como tal f' tem, no máximo, duas raízes distintas. Chegamos a uma contradição. Concluímos que f não pode ter três extremos locais.