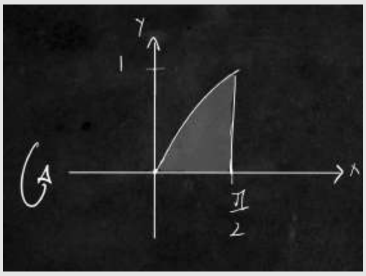
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 04/10/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Considere a região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

1,0 (a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine sua área.

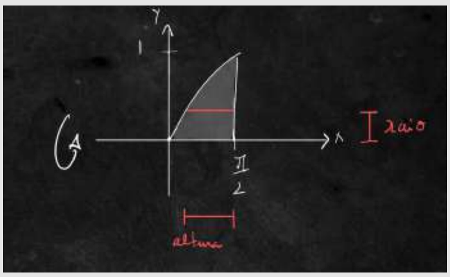
(0,5)



(0,5)
A área é

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

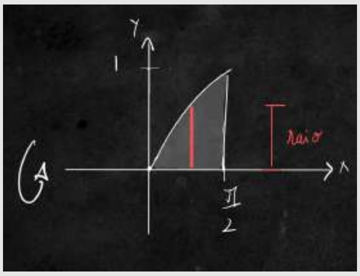
1,0 (b) Escreva a integral que expressa o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das cascas cilíndricas. Não calcule a integral.



Uma casca ao nível $y \in [0,1]$ tem altura $\pi/2 - \operatorname{arcsen} y$ e raio y donde o volume pretendido é dado por

$$\int_0^1 2\pi y \cdot (\pi/2 - \operatorname{arcsen} y)dy.$$

2,0 (c) Determine o volume de $\mathcal{S}$, pelo método do fatiamento.



Uma fatia ao nível $x \in [0, \pi/2]$ é um disco com raio $\operatorname{sen} x$ e área $A(x) = \pi(\operatorname{sen} x)^2$ volume pretendido é dado por

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} A(x)dx = \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx \\ = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ = \frac{\pi}{2}\left[(\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} \pi}{2}) - 0\right] \\ = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

2. Determine:

1,0 (a) $\int_0^2 (x+1)e^x dx$

$$\int_0^2 (x+1)e^x dx \overset{PP}{=} -\int_0^2 e^x dx + (x+1)e^x\Big|_0^2 = -e^x\Big|_0^2 + (3e^2 - 1) = 1 - e^2 + 3e^2 - 1 = 2e^2.$$

1,5 (b) $\int_1^4 \frac{\cos\left(a\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}dt$, $a > 0$

(1,0)
Substituindo

$$\begin{cases} u = a\sqrt{t} \\ du = a\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\ t = 1 \Rightarrow u = a \\ t = 4 \Rightarrow u = 2a \end{cases}$$

temos

$$\int_1^4 \frac{\cos\left(a\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{a}\int_a^{2a} \cos u du$$

(0,5)

$$= \frac{2}{a} \operatorname{sen} u\Big|_a^{2a} = \frac{2}{a}\left(\operatorname{sen} 2a - \operatorname{sen} a\right).$$

1,5 (c) $\int \frac{4x^2+1}{x(2x-1)^2}dx$

(0,75)
A decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x^2+1}{x(2x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{(2x-1)^2}$$

donde

$$4x^2+1 = A(2x-1)^2 + B(2x-1)x + Cx$$

Para $x = 1/2$, obtemos $2 = C/2$, $C = 4$.
Para $x = 0$, obtemos $1 = A$.
Para $x = 1$, obtemos $5 = A + B + C$, donde $B = 0$.
(0,75)
Portanto, fazendo uma substituição $u = 2x - 1$ na segunda integral em baixo

$$\int \frac{4x^2+1}{x(2x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + 4\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx$$
$$= \ln|x| - \frac{2}{2x-1} + C.$$

2,0 (d) $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$, usando uma substituição trigonométrica.

(0,5)
Substituindo

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} \theta, \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ dx = 2 \cos \theta d\theta \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta \end{cases}$$

$$I := \int x^3\sqrt{4-x^2}dx = 32\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta d\theta.$$

(1,0)

Continuando e substituindo $u = \cos\theta$, $du = -\operatorname{sen}\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
I &:= 32\int \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= 32\int (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= -32\int (1-u^2)u^2 du \\
&= 32\int u^4 - u^2 du \\
&= \frac{32}{5}u^5 - \frac{32}{3}u^3 + C \\
&= \frac{32}{5}\cos^5\theta - \frac{32}{3}\cos^3\theta + C.
\end{aligned}$$

(0,5)

Finalmente, como $x/2 = \operatorname{sen}\theta$, temos $x^2/4 = \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, donde $\cos^2\theta = 1 - x^2/4$, e $|\cos\theta| = \sqrt{1-x^2/4}$. Como $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, segue que

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

e

$$\begin{aligned}
I &= \frac{32}{5}\frac{1}{32}(4-x^2)^{5/2} - \frac{32}{3}\frac{1}{8}(4-x^2)^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$