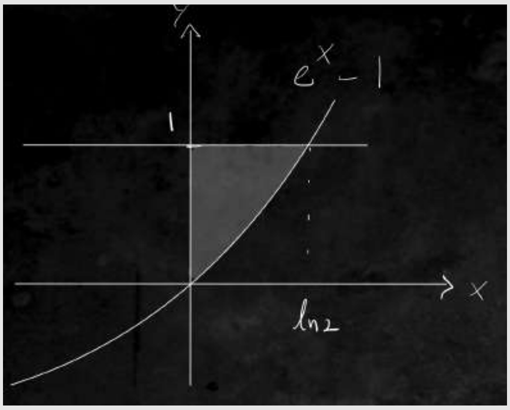
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 04/10/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Considere a região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pelas curvas $y = e^x - 1$, $x = 0$, $y = 1$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

1,0 (a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine sua área.

(0,5)



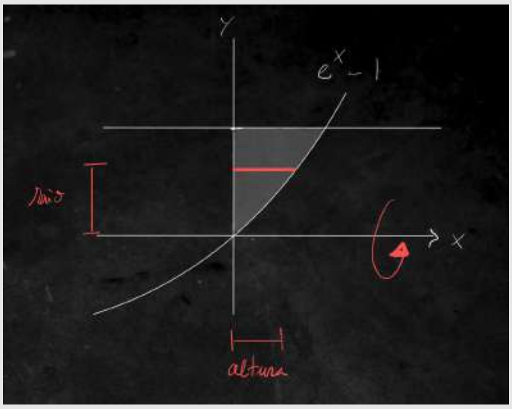
Interseções: $e^x - 1 = 1$, $x = \ln 2$

(0,5)

A área é

$$\int_0^{\ln 2} 1 - (e^x - 1)dx = 2x - e^x\Big|_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2\ln 2 - 1.$$

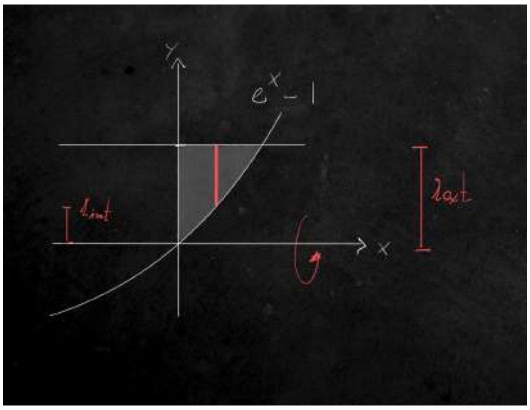
1,0 (b) Escreva a integral que expressa o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das cascas cilíndricas. Não calcule a integral.



Uma casca ao nível $y \in [0,1]$ tem raio y e altura $\ln(y+1)$donde o volume pretendido é dado por

$$\int_0^1 2\pi y \cdot \ln(y+1)dy.$$

2,0 (c) Determine o volume de $\mathcal{S}$, pelo método do fatiamento.



Uma fatia ao nível $x \in [0, \ln 2]$ é uma arruela com raio externo 1, raio interno $e^x - 1$ e área $A(x) = \pi 1^2 - \pi(e^x-1)^2$ volume pretendido é dado por

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} A(x)dx &= \pi \int_0^{\ln 2} 1-(e^x-1)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\ln 2} 1-(e^{2x}-2e^x+1)dx \\ &= \pi \int_0^{\ln 2} -e^{2x}+2e^x dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x\right]_0^{\ln 2} \\ &= \pi \left[\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+2e^{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right] \\ &= \pi\left[(-2+4)-\frac{3}{2}\right] \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. Determine:

1,0 (a) $\int_0^{\pi/2}(x+a)\cos x dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(x+a)\cos x dx &\overset{PP}{=} -\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx + [(x+a)\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} \\ &= [\cos x]_0^{\pi/2} + \pi/2 + a \\ &= -1+\pi/2+a.\end{aligned}$$

1,5 (b) $\int_0^a ax\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$, $a>0$

(1,0)
Substituindo

$$\begin{cases} u = 1 - x^2/a^2 \\ du = -2x/a^2 dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = a \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^a ax\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = -\frac{a^3}{2}\int_1^0 \sqrt{u}du$$

(0,5)

$$= -\frac{a^3}{3}u^{3/2}\Big|_1^0 = \frac{a^3}{3}.$$

1,5 (c) $\int \frac{1+6x}{(2x-1)(x-1)}dx$

(0,75)
A decomposição em frações parciais é

$$\frac{1+6x}{(2x-1)(x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1}$$

donde

$$1+6x = A(x-1) + B(2x-1).$$

Para $x=1$, obtemos $7 = B$.
Para $x = 1/2$, obtemos $4 = -A/2$, $A = -8$.
(0,75)
Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+6x}{(2x-1)(x-1)}dx &= -8\int \frac{1}{2x-1}dx + 7\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= -4\ln|2x-1| + 7\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

2,0 (d) $\int \frac{x^3}{8\sqrt{x^2+4}}dx$, usando uma substituição trigonométrica.

(0,5)
Substituindo

$$\begin{cases} x = 2\tan\theta, \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ dx = 2\ \cos\ \sec^2\theta d\theta \\ \sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta \end{cases}$$

temos

$$I := \int \frac{x^3}{8\sqrt{x^2+4}}dx = \int \tan^3\theta\sec\theta d\theta.$$

(1,0)
Continuando e substituindo $u = \sec\theta$, $du = \sec\theta\tan\theta d\theta$

$$\begin{aligned} I &:= \int \tan^2\theta\tan\theta\sec\theta d\theta \\ &= \int (\sec^2\theta - 1)\tan\theta\sec\theta d\theta \\ &= \int u^2 - 1du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + C \\ &= \frac{\sec^3\theta}{3} - \sec\theta + C.\end{aligned}$$

(0,5)

Finalmente, como $x/2 = \tan\theta$, temos $x^2/4 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, donde $\sec^2\theta = 1 + x^2/4$, e $|\sec\theta| = \sqrt{1 + x^2/4}$. Como $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, segue que

$$\sec\theta = \sqrt{1 + x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2}$$

e

$$I = \frac{1}{24}(4 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}(4 + x^2)^{1/2} + C.$$