Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 15/10/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Calcule

1,0 (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{ sen } x}{4x^3}$

Aplicando a Regra de L'Hopital duas vezes e usando o limite fundamental trigonométrico

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{ sen } x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{24x} = \frac{1}{24} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{24}.$$

1,0 (b) $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

(0,5)
Substituindo

$$\begin{cases} u = \ln x \\ du = 1/x dx \\ x = e, u = \ln e = 1 \\ x = e^4, u = \ln e^4 = 4 \ln e = 4, \end{cases}$$

(0,5)

$$\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_1^4 u^{-1/2} du = 2 \left[u^{1/2}\right]_1^4 = 2(2-1) = 2.$$

1,5 (c) a equação da reta tangente à curva $y = xe^{-x^2}$ no ponto $(1, 1/e)$

(1,0)
Derivando com respeito a x:

$$y' = e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

(0,5)

Para $x = 1$, $y = 1/e$, temos $y' = e^{-1}(1-2) = -e^{-1}$ e uma equação da reta tangente pretendida é $y - e^{-1} = -e^{-1}(x-1)$.

1,5 (d) $\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt$.

(1,0)

Integrando por partes duas vezes, obtemos a primitiva da função integranda:

$$\begin{aligned}\int t^2 \text{ sen } 2t dt &= + \int t \cos 2t dt - \frac{1}{2}t^2 \cos 2t \\ &= -\frac{1}{2}\int \text{ sen } 2t dt + \frac{1}{2}t \text{ sen } 2t - \frac{1}{2}t^2 \cos 2t \\ &= +\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2}t \text{ sen } 2t - \frac{1}{2}t^2 \cos 2t + C \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{t^2}{2}\right) \cos 2t + \frac{1}{2}t \text{ sen } 2t + C.\end{aligned}$$

(0,5)

Assim, pelo TFC 2,

$$\begin{aligned}\int t^2 \text{ sen } 2t dt &= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{t^2}{2}\right) \cos 2t + \frac{1}{2}t \text{ sen } 2t\right]_0^{\pi} \\ &= \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) \cos 2\pi + 0\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - 0\right) \cos 0\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

1,5 2. Suponha que $4x^2 + 9y^2 = 36$, onde x, y são funções de t. Se $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $x = -2$ e $y = 2\sqrt{5}/3$.

(0,75)

Derivando com respeito a t ,

$$\begin{aligned}8x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ 4x\frac{dx}{dt} + 9y\frac{dy}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

(0,75)

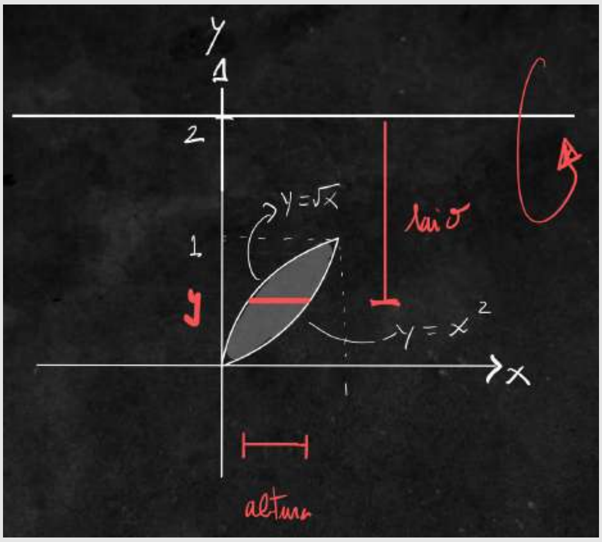
Para $x = -2$ e $y = 2\sqrt{5}/3$, $dx/dt = 3$ temos

$$
\begin{aligned}
-4(-2)(3)+9\left(2\sqrt{5}/3\right)\frac{dy}{dt} &= 0\\
6\sqrt{5}\frac{dy}{dt} &= 24\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{4}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

3. Seja $\mathcal{R}$ a região do plano xy delimitada pelas curvas $y=\sqrt{x}$ e $y=x^2$. Seja $\mathcal{S}$ o sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y=2$. Escreva uma integral que represente o volume de $\mathcal{S}$:

Obs: As curvas intersetam-se quando $\sqrt{x}=x^2 \Leftrightarrow x=x^4 \Leftrightarrow x(1-x^3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

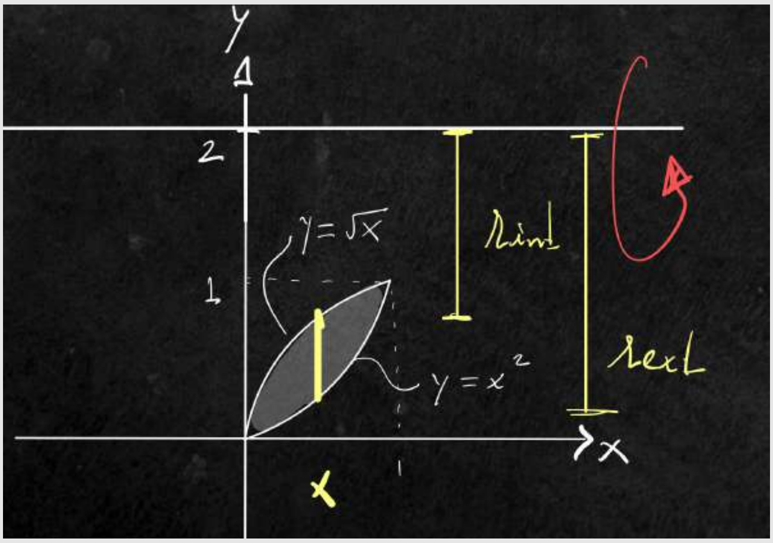
0,75 (a) usando o método das cascas cilíndricas



Uma casca ao nível $y\in[0,1]$ tem altura $\sqrt{y}-y^2$ e raio $(2-y)$, donde o volume de $\mathcal{S}$ é

$$\int_0^1 2\pi(2-y)(\sqrt{y}-y^2)dx.$$

0,75 (b) usando o método do fatiamento.



Uma fatia ao nível $x \in [0,1]$ origina uma arruela com área

$$A(x) = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 = \pi(2-x^2)^2 - \pi(2-\sqrt{x})^2$$

donde o volume de $\mathcal{S}$ é

$$\int_0^1 A(x)dx = \pi \int_0^1 (2-x^2)^2 - (2-\sqrt{x})^2 dx.$$

4. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}$ com assíntota horizontal $y = -2$ tal que $f(0) = -1$ e tal que $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+3)^2}$. Acerca de f , determine:

0,5 (a) os intervalos onde é crescente/decrescente

O sinal da derivada f' é o sinal do numerador $-6x$, pois o denominador $(x^2+3)^2$ é positivo para todo o x, donde $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ e pelo Teste C/D, f é decrescente em $(0, \infty)$ e é crescente em $(-\infty, 0)$.

1,0 (b) os intervalos onde tem concavidade para cima/baixo

(0,5)
Derivando com a Regra do Quociente e simplificando o fator x^2+3

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-6(x^2+3)^2 + 6x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{-6(x^2+3) + 24x^2}{(x^2+3)^3} \\ &= 18\frac{x^2-1}{(x^2+3)^3}. \end{aligned}$$

(0,5)

Analogamente a (a), note que o sinal de f'' é o sinal da expressão $x^2 - 1$. Note que $y = x^2 - 1$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade voltada para cima, sendo, portanto, negativa entre os zeros, i.e., em $(-1, 1)$ e positiva em $(-\infty, -1)$ e em $(1, \infty)$. Pelo Teste da Concavidade, concluímos que f tem concavidade voltada para cima em $(-\infty, -1)$ e em $(1, \infty)$ e tem concavidade voltada para baixo em $(-1, 1)$.

0,5 (c) um esboço indicando explicitamente extremos e pontos de inflexão, caso existam.

De (a), (b) existe um único máximo $f(0) = -1$ (trata-se mesmo de máximo global) e existem pontos de inflexão $(-1, f(-1)$, $(1, f(1))$.

Um exemplo