

Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática - CCE  
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 15/10/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

1,0

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

Aplicando a Regra de L'Hopital duas vezes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

1,0

(b)  $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

(0,5)

Substituindo

$$\begin{cases} u = 1/x \\ du = -1/x^2 dx \\ x = 1, u = 1 \\ x = 2, u = 1/2, \end{cases}$$

(0,5)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= - \int_1^{1/2} e^u du \\ &= \int_{1/2}^1 e^u du = [e^u]_{1/2}^1 = e - \sqrt{e}. \end{aligned}$$

1,5

(c) a equação da reta tangente à curva  $\cos(x + y) = y - x$  no ponto  $(\pi/4, \pi/4)$

(1,0)

Derivando implicitamente com respeito a  $x$ :

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}(x+y)(1+y') &= y' - 1 \\ -\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)y' &= y' - 1 \\ y'(1 + \operatorname{sen}(x+y)) &= 1 - \operatorname{sen}(x+y) \\ y' &= \frac{1 - \operatorname{sen}(x+y)}{1 + \operatorname{sen}(x+y)}. \end{aligned}$$

(0,5)

Para  $x = y = \pi/4$ ,  $y' = (1 - \operatorname{sen}(\pi/2))(1 + \operatorname{sen}(\pi/2)) = 0$ , portanto uma equação da reta tangente pretendida é  $y - \pi/4 = 0(x - \pi/4)$ , ou seja,  $y = \pi/4$ .

1,5

(d)  $\int_0^2 (x^2 + 1)e^{-x} dx$ .

(1,0)

Integrando por partes duas vezes, obtemos a primitiva da função integranda:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)e^{-x} dx &= +2 \int xe^{-x} dx - (x^2 + 1)e^{-x} \\ &= +2 \int e^{-x} dx - 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} \\ &= -2e^{-x} - 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(-3 - 2x - x^2). \end{aligned}$$

(0,5)

Assim, pelo TFC 2,

$$\int_0^2 (x^2 + 1)e^{-x} dx = [e^{-x}(-3 - 2x - x^2)]_0^2 = -11e^{-2} + 3.$$

1,5

2. Um ponto desloca-se sobre a hipérbole  $xy = 4$ ,  $x > 0$ , de tal modo que a velocidade da ordenada  $y$  do ponto é 10 m/s. Determine a velocidade da abscissa  $x$  do ponto quando  $x = 2$  m.

(0,75)

Pensamos  $x, y$  (em metros) como funções do tempo  $t$  (em segundos). Derivando com respeito a  $t$ ,

$$\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x = 0.$$

(0,75)

No instante pretendido, temos  $x = 2$ , donde  $2y = 4$ ,  $y = 2$ , e temos  $dy/dt = 10$ ,

donde

$$\frac{dx}{dt}2 + 10(2) = 0.$$

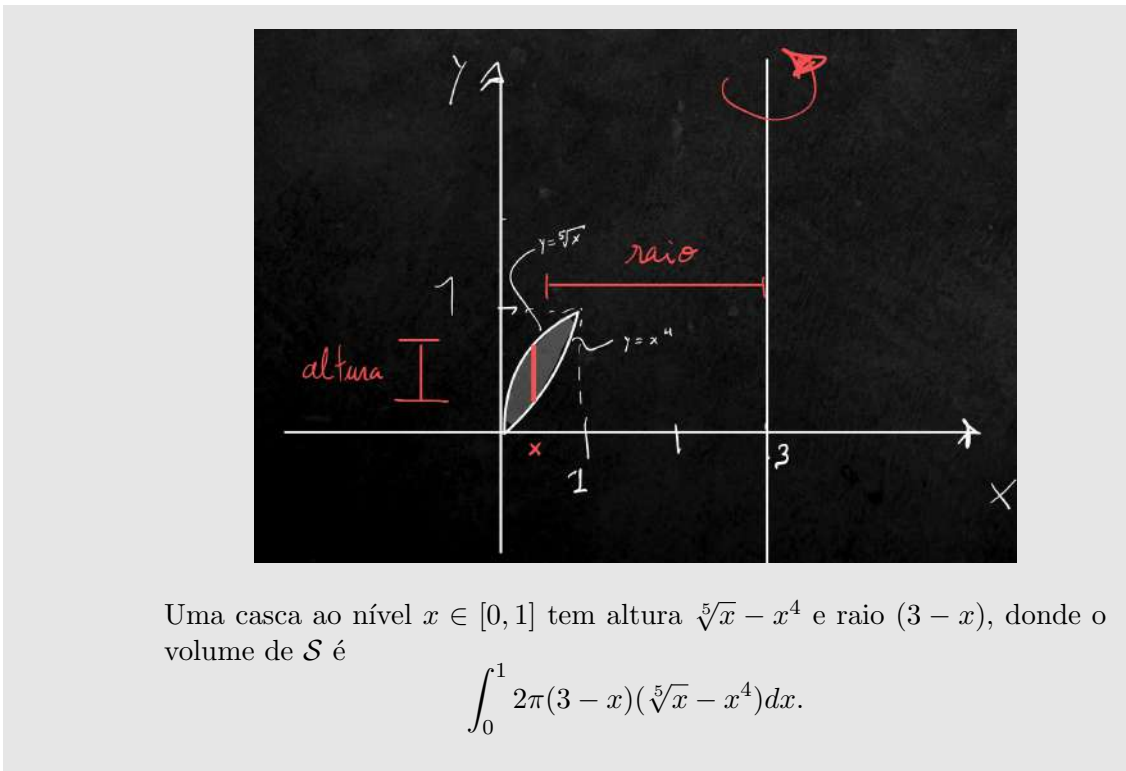
A velocidade da abscissa é  $dx/dt = -10$  (m/s).

3. Seja  $\mathcal{R}$  a região do plano  $xy$  delimitada pelas curvas  $y = \sqrt[5]{x}$  e  $y = x^4$ . Seja  $\mathcal{S}$  o sólido obtido por revolução de  $\mathcal{R}$  em torno da reta  $x = 3$ . Escreva uma integral que represente o volume de  $\mathcal{S}$ :

Obs: As curvas intersectam-se quando  $\sqrt[5]{x} = x^4 \Leftrightarrow x = x^{20} \Leftrightarrow x(1 - x^{19}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$ .

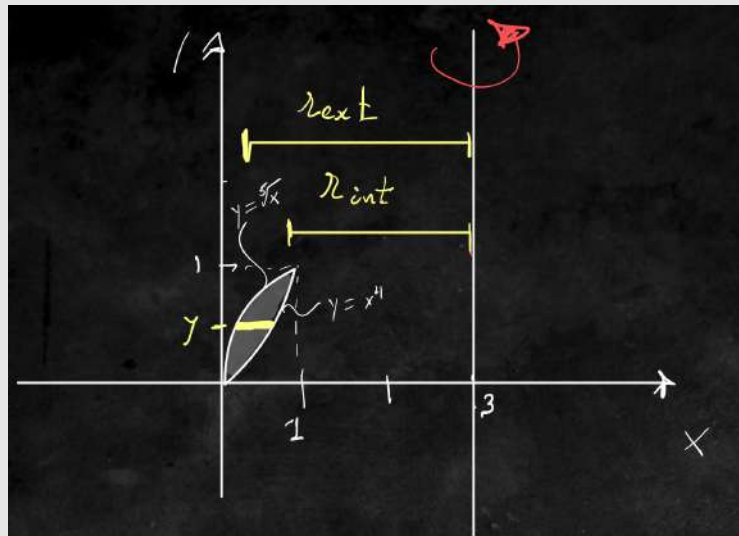
0,75

(a) usando o método das cascas cilíndricas



0,75

(b) usando o método do fatiamento.



Uma fatia ao nível  $y \in [0, 1]$  origina uma arruela com área

$$A(y) = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 = \pi(3 - y^5)^2 - \pi(3 - \sqrt[4]{y})^2$$

donde o volume de  $\mathcal{S}$  é

$$\int_0^1 A(y) dy = \pi \int_0^1 (3 - y^5)^2 - (3 - \sqrt[4]{y})^2 dy.$$

4. Considere uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$  com assíntota horizontal  $y = 1$  tal que  $f(0) = 0$  e tal que  $f'(x) = \frac{18x}{(x^2+9)^2}$ . Acerca de  $f$ , determine:

0,5

- (a) os intervalos onde é crescente/decrescente

O sinal da derivada  $f'$  é o sinal do numerador  $18x$ , pois o denominador  $(x^2 + 9)^2$  é positivo para todo o  $x$ , donde  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  e pelo Teste C/D,  $f$  é crescente em  $(0, \infty)$  e é decrescente em  $(-\infty, 0)$ .

1,0

- (b) os intervalos onde tem concavidade para cima/baixo

(0,5)

Derivando com a Regra do Quociente e simplificando o fator  $x^2 + 9$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{18(x^2 + 9)^2 - 18x \cdot 2(x^2 + 9) \cdot 2x}{(x^2 + 9)^4} \\ &= 18 \frac{(x^2 + 9) - 4x^2}{(x^2 + 9)^3} \\ &= 54 \frac{3 - x^2}{(x^2 + 9)^3}. \end{aligned}$$

(0,5)

Analogamente a (a), note que o sinal de  $f''$  é o sinal da expressão  $3 - x^2$ . Note que  $y = 3 - x^2$  tem como gráfico uma parábola com a concavidade voltada para baixo, sendo, portanto, positiva entre os zeros, i.e., em  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  e negativa em  $(-\infty, -\sqrt{3})$  e em  $(\sqrt{3}, \infty)$ . Pelo Teste da Concavidade, concluímos que  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $(-\infty, -\sqrt{3})$  e em  $(\sqrt{3}, \infty)$  e tem concavidade voltada para cima em  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

0,5

- (c) um esboço indicando explicitamente extremos e pontos de inflexão, caso existam.

De (a), (b) existe um único mínimo  $f(0) = 0$  (trata-se mesmo de mínimo global) e existem pontos de inflexão  $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$ ,  $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ .

Um exemplo

