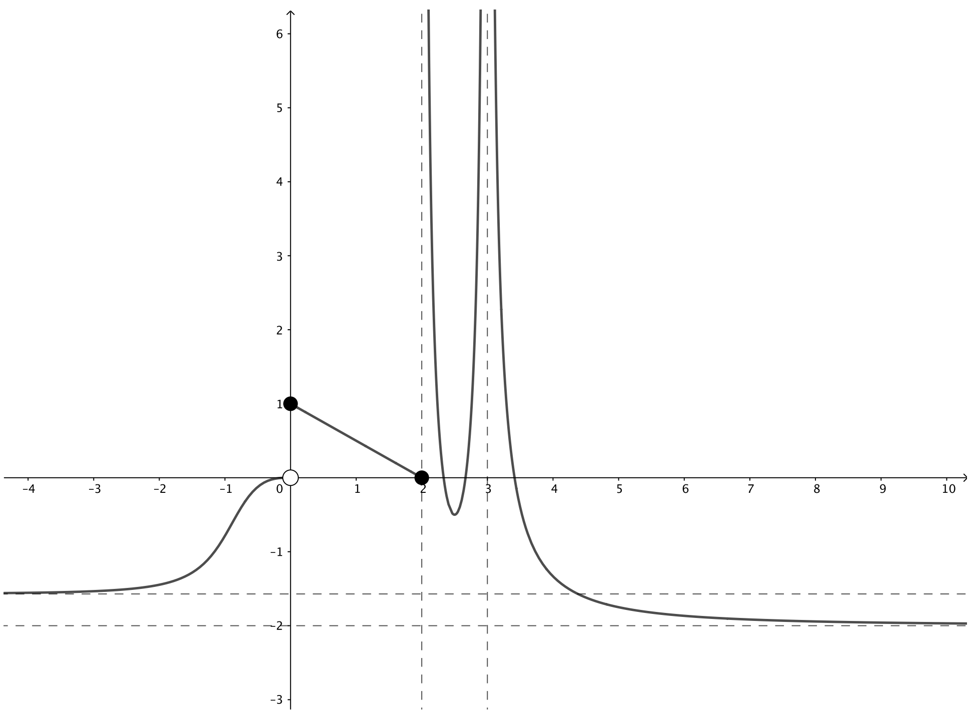
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 06/12/21 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

2,5 1. O gráfico da função f é apresentado .



Responda se é verdadeiro ou se é falso, justificando:

(a) f é contínua em $x = 2$

(b) as retas $y = -2$, $x = 2$ são as únicas retas assíntotas do gráfico de f

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -e$

(d) $f(x) = 0$ tem exatamente 6 soluções

(e) $f(4) + \lim_{x\to 2^-} f(x) > \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(5*0,5)

(a) Falso, pois não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) Falso, pois, por exemplo, $x = 3$ é assíntota.

(c) Falso, pois $\lim_{x\to -\infty} f(x) > -2 > -e$.

(d) Falso, pois f tem exatamente 4 zeros.

(e) Falso, pois $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $f(4) < 0$ donde $f(4) + \lim_{x\to 2^-} f(x) < 0 < 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2,5 2. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = a + \text{ arctg } (2x + \pi)$.

(a) Determine o domínio e a imagem de f.

(b) Determine $f^{-1}(x)$, o domínio de f^{-1} e a imagem de f^{-1}.

(a) (0,5)

O domínio de f é todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$-\pi/2 < \text{ arctg } (2x + \pi) < \pi/2$$
$$a - \pi/2 < \underbrace{a + \text{ arctg } (2x + \pi)}_{f(x)} < a + \pi/2,$$

portanto, a imagem de f é o intervalo $(a - \pi/2, a + \pi/2)$.

(b) (1,0)

Temos

$$\begin{aligned} y &= a + \text{ arctg } (2x + \pi) \\ y - a &= \text{ arctg } (2x + \pi) \\ \text{tg } (y - a) &= 2x + \pi \\ \text{tg } (y - a) - \pi &= 2x \\ \frac{\text{tg } (y - a) - \pi}{2} &= x. \end{aligned}$$

Donde $f^{-1}(x) = \frac{\text{tg } (x-a)-\pi}{2}$.

(0,5)

O domínio de f^{-1} é a imagem de f, ou seja, $(a - \pi/2, a + \pi/2)$.

(0,5)

A imagem de f^{-1} é o domínio de f, ou seja, $\mathbb{R}$.

3,0 3. Determine :

(a) $\lim_{t\to -\infty} \frac{\pi t(1-t^2)-2t^3}{et^3+3t}$

(b) $\lim_{x\to a} \frac{x(x-a)+(x-a)}{2x^2-2(3+a)x+6a}$, $a \neq 3$

(c) $\lim_{x\to a}$ arcsen $\left(\frac{x^2-a^2}{2ax-2a^2}\right)$, $a \neq 0$.

(a) (1,0)

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\pi t(1-t^2)-2t^3}{et^3+3t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\pi t-(\pi+2)t^3}{et^3+3t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\pi/t^2-(\pi+2)}{e+3/t^2} = -\frac{\pi+2}{e}.$$

(b) (1,0)
Fatorando o denominador

$$2x^2-2(3+a)x+6a = 2(x^2-(3+a)x+3a) = 2(x-3)(x-a)$$

donde

$$\lim_{x\to a} \frac{x(x-a)+(x-a)}{2x^2-2(3+a)x+6a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+1)}{2(x-3)(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x+1}{2(x-3)} = \frac{a+1}{2(a-3)}.$$

(c) (1,0)
Como

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{2ax-2a^2} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{2a(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{2a} = 1,$$

por continuidade

$$\lim_{x\to a} \text{ arcsen } \left(\frac{x^2-a^2}{2ax-2a^2}\right) = \text{ arcsen } \left(\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{2ax-2a^2}\right) = \text{ arcsen } 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2,0 4. Seja $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

(a) Use a definição de derivada para determinar $f'(0)$.
(b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.
(c) A reta $x = 1/2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f? Justifique.

(a) (1,0)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-1}{x(\sqrt{1-2x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-2x}+1} = -1.$$

(b) (0,5)
$y-1 = -(x-0) \Leftrightarrow y = -x+1$

(c) (0,5)
Não, pois f é contínua em $x = 1/2$ (contínua à esquerda, pois o domínio de f é $(-\infty, 1/2]$).