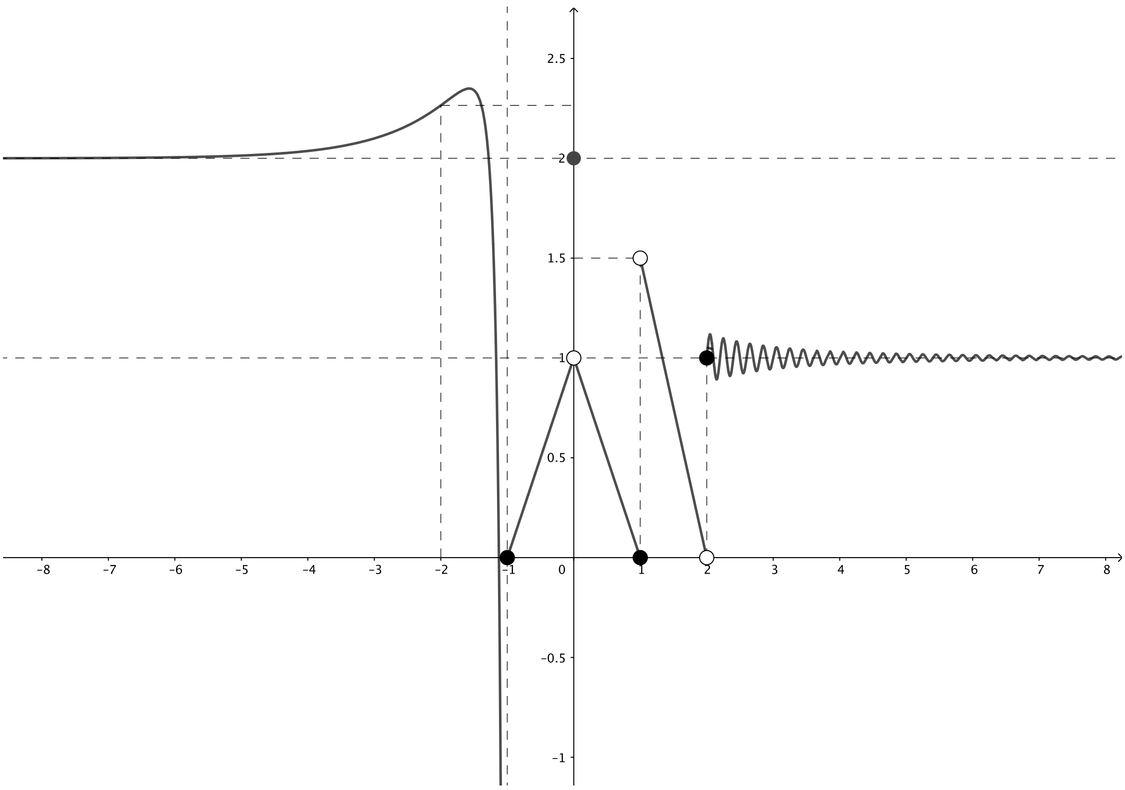
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT09570) – 06/12/21 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

2,5 1. O gráfico da função f é apresentado .



Responda se é verdadeiro ou se é falso, justificando:

(a) f é contínua em $x = 1$

(b) as retas $x = -1$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 1$ são assíntotas do gráfico de f

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) > e - 1$

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) > \lim_{x\to 1^-} f(x)$

(e) $\lim_{x\to-2} f(x) - \lim_{x\to 0} f(x) < f(0)$.

(5*0,5)

(a) Falso, pois não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(b) Falso, pois $x = 1$ não é assíntota vertical; note que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1,5$.

(c) Verdadeiro, pois $e < 2,8$, donde $e - 1 < 1,8 < 2 = \lim_{x\to -\infty} f(x)$.

(d) Verdadeiro, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(e) Verdadeiro, pois $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -2} f(x) < 2,5$ donde

$$\lim_{x\to -2} f(x) - \lim_{x\to 0} f(x) < 1,5 < 2 = f(0).$$

2,5 2. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt[3]{(a-x)^3 + e}$. Determine:

(a) o domínio de f e $\lim_{x\to (a+\sqrt[3]{e})^-} f(x)$.

(b) $f^{-1}(x)$.

(a) (0,75)
A função está bem definida quando

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(a-x)^3 + e} &> 0 \\ (a-x)^3 + e &> 0 \\ (a-x)^3 &> -e \\ (a-x) &> -\sqrt[3]{e} \\ x &< a + \sqrt[3]{e}, \end{aligned}$$

portanto, o domínio de f é o intervalo $(-\infty, a + \sqrt[3]{e})$.
(0,75)
Por continuidade,

$$\lim_{x\to (a+\sqrt[3]{e})^-} \ln \sqrt[3]{(a-x)^3 + e} = \ln \sqrt[3]{\lim_{x\to (a+\sqrt[3]{e})^-} (a-x)^3 + e} = \ln 0^+ = -\infty.$$

(b) (1,0)
Temos

$$\begin{aligned} y &= \ln \sqrt[3]{(a-x)^3 + e} \\ e^y &= \sqrt[3]{(a-x)^3 + e} \\ e^{3y} &= (a-x)^3 + e \\ e^{3y} - e &= (a-x)^3 \\ \sqrt[3]{e^{3y} - e} &= a - x \\ x &= a - \sqrt[3]{e^{3y} - e}. \end{aligned}$$

Donde $f^{-1}(x) = a - \sqrt[3]{e^{3x} - e}$.

3,0 3. Determine :

(a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{x+9-\pi}-3}{x^3-\pi x^2}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x^2}{\sqrt{3x^3+2}}\right)$

(c) $\lim_{x\to a} f(g(x)+h(x))$, sendo que f é função ímpar e contínua, $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = -2a$ e $\lim_{x\to a} h(x) = a$.

(a) (1,0)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{x+9-\pi}-3}{x^3-\pi x^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{x+9-\pi-9}{x^2(x-\pi)(\sqrt{x+9-\pi}+3)} = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{x^2(\sqrt{x+9-\pi}+3)} = \frac{1}{6\pi^2}$$

(b) (0,5)

Temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+3/\sqrt{x}} = 1$$

e

(0,5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{3x^3+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x^{3/2}}}} = \infty.$$

Portanto, $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x^2}{\sqrt{3x^3+2}}\right) = -\infty$.

(c) (0,5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(g(x)+h(x)) &= f\left(\lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} h(x)\right)\\ &= f(-2a+a)\\ &= f(-a).\end{aligned}$$

(0,5)

Como f é contínua, temos $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 1$ e, como f é ímpar, $f(-a) = -f(a) = -1$.

2,0 4. Seja $f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$.

(a) Use a definição de derivada para determinar $f'(2)$.

(b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f para $x = 2$.

(c) A reta $x = 5$ é uma assíntota vertical do gráfico de f? Justifique.

(a) (1,0)

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3x-2}{x-5}+\frac{4}{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{13(x-2)}{3(x-5)}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{13}{3(x-5)} = -\frac{13}{9}.$$

(b) (0,5)

$y + 4/3 = -13/9(x-2)$

(c) (0,5)

Sim, pois $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{3x-2}{x-5} = 13/0^+ = \infty$.