

Universidade Federal do Espírito Santo
 Departamento de Matemática - CCE
 P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 16/02/22 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

- 1,0 (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt[4]{x}}$
- 1,5 (b) a equação da reta tangente à curva $y = \sinh^2(y) - \tan x$ no ponto $(\pi, 0)$
- 1,5 (c) a derivada em $x = 0$ da função $\frac{f(g(3x))}{g(x)}$, sabendo que $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt[4]{x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{2x}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^{1/4}} = 0.$$

(b) Derivando implicitamente com respeito a x

(0,75)

$$y' = 2 \sinh y \cdot \cosh y \cdot y' - \sec^2 x.$$

(0,75)

Para $(x, y) = (\pi, 0)$, $y' = 0 - \sec^2 \pi = -1$, donde uma equação da reta tangente pretendida é $y - 0 = -(x - \pi)$.

(c) Aplicando a regra do quociente e a regra da cadeia

(1,0)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(g(3x))}{g(x)} \right)' &= \frac{g(x)(f(g(3x)))' - f(g(3x))g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{g(x)f'(g(3x))g'(3x)3 - f(g(3x))g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada em zero é

(0,5)

$$\frac{g(0)f'(1)g'(0)3 - f(1)g'(0)}{g(0)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{1} = 14.$$

2. Considere uma função f que tem uma assíntota horizontal $y = 0$ e $f(0) = 3$. Além disso, a derivada é $f'(x) = -xe^x$. Acerca de f , determine

- 1,0 (a) os intervalos onde é crescente/decrescente
 1,5 (b) os intervalos de concavidade para cima/baixo
 1,0 (c) um esboço explicitando extremos e pontos de inflexão, caso existam.

(a) $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ e o sinal de f' é o sinal do fator $-x$, pois $e^x > 0$.
 Resumo do estudo do sinal de f' e dos intervalos de monotonia:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sinal de f'	+	-
monotonia de f	crescente	decrescente

(b) (0,5)

$$f''(x) = -e^x - xe^x = e^x(-1 - x)$$

$$f''(x) = 0 \text{ quando } x = -1$$

O sinal de f'' é o sinal do fator $-1 - x$ pois o outro fator e^x é positivo.

Resumo do estudo do sinal de f'' e dos intervalos de concavidade:

(1,0)

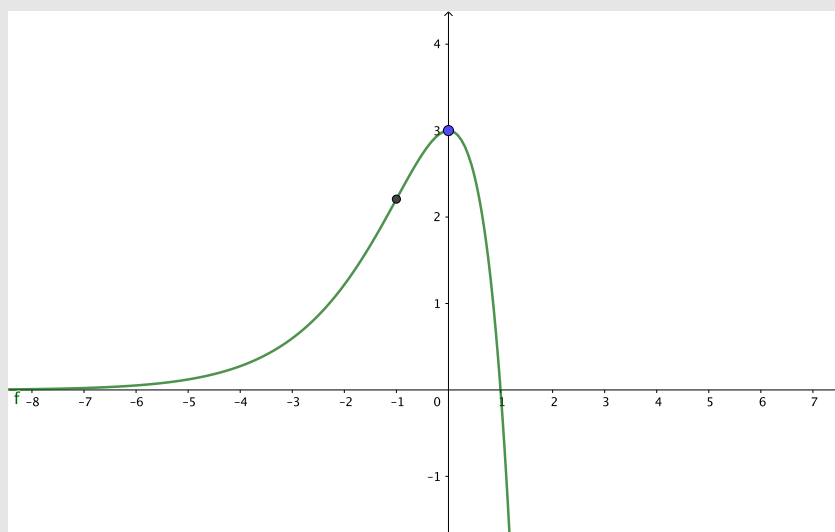
	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sinal de f''	+	-
concavidade de f	cima	baixo

(c) (0,5)

Pelas partes anteriores: existe um máximo (global) $f(0) = 3$ e não há outros extremos; existe um único ponto de inflexão $(-1, f(-1))$.

Exemplo:

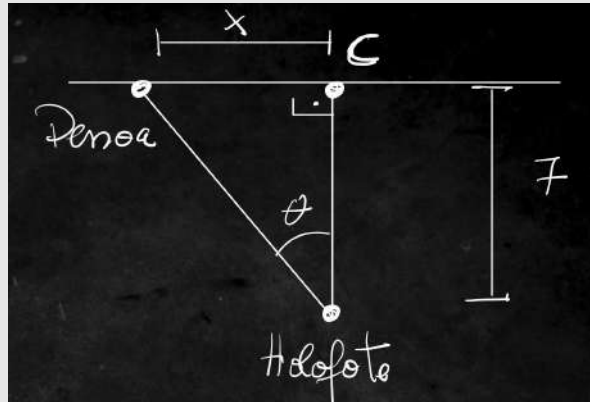
(0,5)



1,5

3. Uma pessoa anda ao longo de um caminho reto com velocidade de $1m/s$. Um holofote localizado no chão a $7m$ do caminho é mantido focalizado na pessoa. A que taxa o holofote está girando quando a pessoa está a $10m$ do ponto do caminho mais próximo da luz.

Diagrama



onde

x é a distância, em m , da pessoa ao ponto C no caminho mais próximo do holofote,

θ é a medida, em rad , do ângulo entre o feixe de luz e a direção determinada pelo holofote e o ponto C .

Assumimos que estas quantidades são funções do tempo t medido em s e que são deriváveis.

Queremos $\frac{d\theta}{dt}$ e temos $\frac{dx}{dt} = 1$, assumindo que a pessoa se afasta de C . Como

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{7},$$

derivando em t obtemos

(1,0)

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{7} \frac{dx}{dt}.$$

(0,5)

No instante em que $x = 10$, temos $\operatorname{tg} \theta = \frac{10}{7}$ e $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1 + 100/49 = 149/49$, donde

$$\begin{aligned} \frac{149}{49} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{7} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{7}{149} \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

Obs.: se assumirmos que a pessoa se aproxima de C , então $dx/dt = -1$ e obtemos $d\theta/dt = -7/149$ (o ângulo diminui, em vez de aumentar).

1,0

4. É verdade ou falso que : “se $f''(0) = 0$, então $(0, f(0))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$ ”? Caso seja verdade, justifique, e, caso seja falso, apresente um contra-exemplo.

Falso.

Contra-exemplo : $f(x) = x^4$, temos $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, mas não há pontos de inflexão no gráfico de f , pois a concavidade é voltada para cima em toda a reta real, não havendo mudança no sentido de concavidade.