Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Cálculo 1 (MAT09570) – 16/02/22 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:
   1,0 (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^2}$ (onde $a > 0$)
   1,5 (b) a equação da reta tangente à curva $2y = \operatorname{sen}(y) + \cos(2x)$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, 0)$
   1,5 (c) a derivada em $x = 0$ da função $f(x)e^{f(2g(x))}$, sabendo que $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1/6$.

(a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}_H \lim_{x\to\infty} \frac{ae^{ax}}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}_H \lim_{x\to\infty} \frac{a^2e^{ax}}{2} = \infty.$$

(b) Derivando implicitamente com respeito a x
(0,75)
$$2y' = y' \cos y - 2 \operatorname{sen} 2x.$$

(0,75)
Para $(x, y) = (\pi/4, 0)$, $2y' = y' - 2$, $y' = -2$, donde uma equação da reta tangente pretendida é $y - 0 = -2(x - \pi/4)$.

(c) Aplicando a regra do produto e a regra da cadeia
(1,0)
$$\begin{aligned}\left(f(x)e^{f(2g(x))}\right)' &= f'(x)e^{f(2g(x))} + f(x)\left(e^{f(2g(x))}\right)' \\ &= f'(x)e^{f(2g(x))} + f(x)e^{f(2g(x))}\left(f(2g(x))\right)' \\ &= f'(x)e^{f(2g(x))} + f(x)e^{f(2g(x))}f'(2g(x))2g'(x).\end{aligned}$$

Assim, a derivada em zero é
(0,5)
$$f'(0)e^{f(0)} + f(0)e^{f(0)}f'(0)2g'(0) = 3 \cdot e^2 + 2 \cdot e^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = 5e^2.$$

2. Considere uma função f que tem uma assíntota vertical $x = 3$ e uma assíntota horizontal $y = 0$ e tem domínio $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Além disso, $f'(x) = \frac{-3}{(x-3)^2}$. Acerca de f, determine

1,0 (a) os intervalos onde é crescente/decrescente

1,5 (b) os intervalos de concavidade para cima/baixo

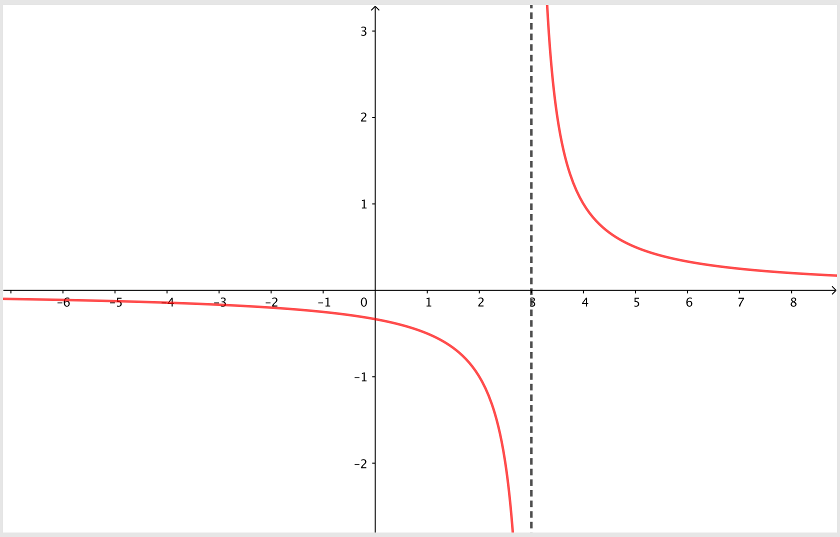
1,0 (c) um esboço explicitando extremos e pontos de inflexão, caso existam.

(a) Como $f'(x) = -3/(x-3)^2 < 0$ para todo $x \neq 3$, sabemos que f é decrescente em $(-\infty, 3)$ e em $(3, \infty)$.

(b) (0,75)
$f''(x) = \left(-3(x-3)^{-2}\right)' = -3(-2)(x-3)^{-3} = \frac{6}{(x-3)^3}$.
$f''(x)$ não se anula e seu sinal é o mesmo que o sinal de $(x-3)^3$, i.e. de $x-3$.
(0,75)
Resumo do estudo do sinal de f'' e dos intervalos de concavidade:

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
sinal de f''	-	+
concavidade de f	baixo	cima

(c) Não existem extremos (Teo. de Fermat) nem pontos de inflexão.
Exemplo



1,5 3. Encontre o ponto $Q(x, y)$ sobre a curva $y = \frac{1}{2}x^2$ que está mais próximo do ponto $P(4, 1)$.

Queremos minimizar distância de $Q(x, y)$ ao ponto $P(4, 1)$, sujeito a $y = x^2/2$.

Essa distância é dada pela expressão

$$Q(x) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}.$$

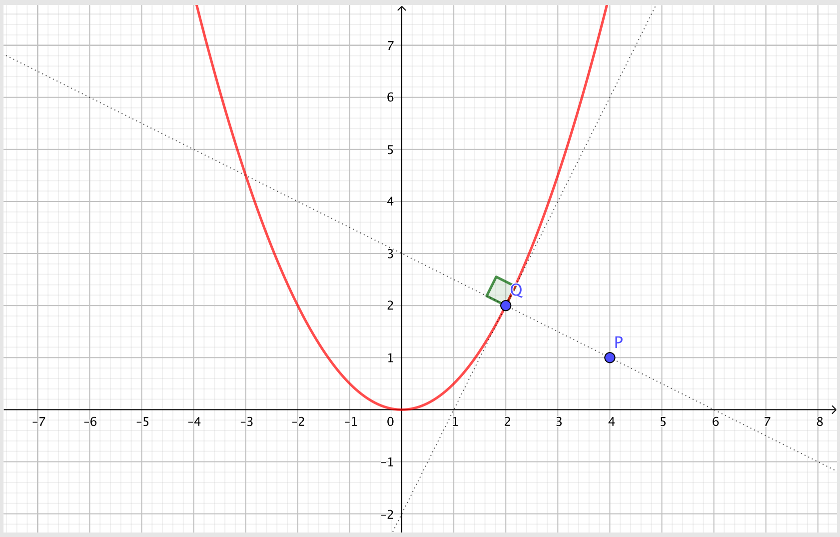
Como $Q(x) \geq 0$, $Q(x_0) \leq Q(x)$ para todo x se e somente se $(Q(x_0))^2 \leq (Q(x))^2$ para todo x. Assim, o minimizante de Q, a existir, é o mesmo de Q^2. Resolvamos o problema de otimização:

minimizar $f(x) = Q(x)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(1,0) Temos $f'(x) = 2(x-4) + 2(x^2/2 - 1)x = x^3 - 8$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

(0,25) Notando que $f'(x) < 0$ para todo $x < 2$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 2$, o Teste da Primeira Derivada para Extremo Globais garante que o mínimo global de f ocorre para $x = 2$. Donde $(2, 2)$ é o ponto procurado.

Ilustração



1,0 4. É verdade ou falso que : "se $f'(x) = g'(x)$ para $-1 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $-1 < x < 1$" ? Caso seja verdade, justifique, e, caso seja falso, apresente um contra-exemplo.

Falso.

Contra-exemplo: tome $f(x) = 1$, $g(x) = 2$; temos $f'(x) = 0 = g'(x)$ para $-1 < x < 1$, contudo as funções são diferentes nesse (e em qualquer) intervalo.