Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 25/03/22 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

1,0 (a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

(b) Substituindo $u = e^{2x} - 1$, $du = 2e^{2x}dx$,

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2} + C = \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

1,0 (c) $\displaystyle\int_0^{-1} f(x)dx$, sabendo que $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = 1$ e que $\displaystyle\int_{-1}^3 2f(x)dx = 2$

(d) De $\int_{-1}^3 2f(x)dx = 2$, obtemos $\int_{-1}^3 f(x)dx = 1$, ou seja, $\int_3^{-1} f(x)dx = -1$. Donde

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} f(x)dx &= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^{-1} f(x)dx \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

1,5 (e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 x dx$

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^7 x dx &= \int \operatorname{sen}^6 x \cdot \operatorname{sen} x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^3 \cdot \operatorname{sen} x dx \\
&= -\int (1-u^2)^3 du \qquad (u = \cos x,\ du = -\operatorname{sen} x dx) \\
&= \int (u^2-1)^3 du \\
&= \int u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1 du \\
&= \frac{1}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - u + C \\
&= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C
\end{aligned}
$$

2,0 (f) $\int_0^1 xe^{-\pi x} dx$

Por partes,

$$
\begin{cases} f = x, g' = e^{-\pi x} \\ f' = 1, g = -\frac{1}{\pi}e^{-\pi x}, \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-\pi x} dx &= -\int_0^1 \left(-\frac{1}{\pi}e^{-\pi x}\right) dx - \frac{1}{\pi}\left[xe^{-\pi x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{-\pi x} dx - \frac{1}{\pi}e^{-\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi^2}\left[e^{-\pi x}\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}e^{-\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi^2}\left(e^{-\pi} - 1\right) - \frac{1}{\pi}e^{-\pi} \\
&= \frac{-e^{-\pi}(1+\pi) + 1}{\pi^2}
\end{aligned}
$$

1,0 (g) $\frac{d}{dx}\int_x^0 e^{-t^2} dt.$

Pelo TFC, $\int_x^0 e^{-t^2} dt = G(0) - G(x)$, em que $G'(u) = e^{-u^2}$. Assim,

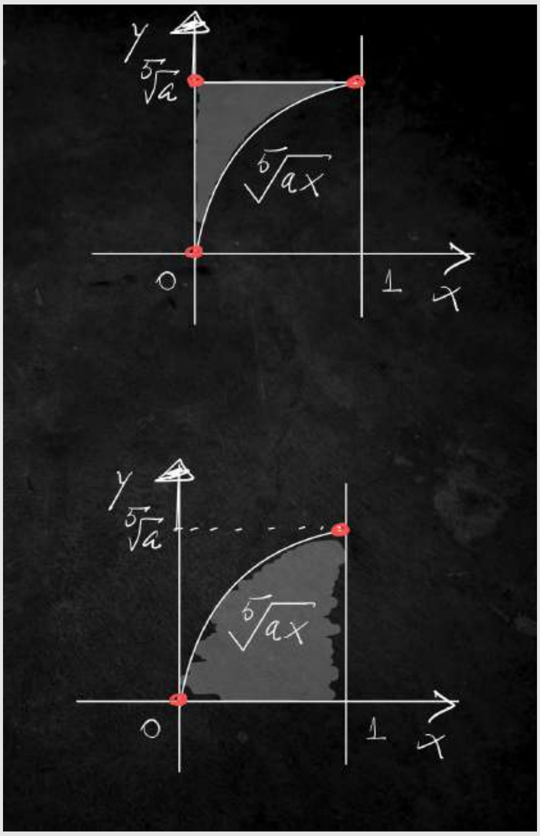
$$
\frac{d}{dx}\int_x^0 e^{-t^2} dt = \frac{d}{dx}(G(0) - G(x)) = 0 - G'(x) = -e^{-x^2}.
$$

2. Seja $a > 0$ e considere a região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt[5]{ax}$,

$x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt[5]{a}$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

O enunciado desta questão tem uma condição a mais que só foi detetada depois do final da prova. Aceitam-se as repostas em que se considera a curva de cima $y_T(x) = \sqrt[5]{a}$ e a curva de baixo $y_B(x) = \sqrt[5]{ax}$, bem como as respostas em que se considera $y_T(x) = \sqrt[5]{ax}$ e $y_B(x) = 0$.

1,5 (a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e expresse sua área por meio de uma integral. Não calcule a integral.

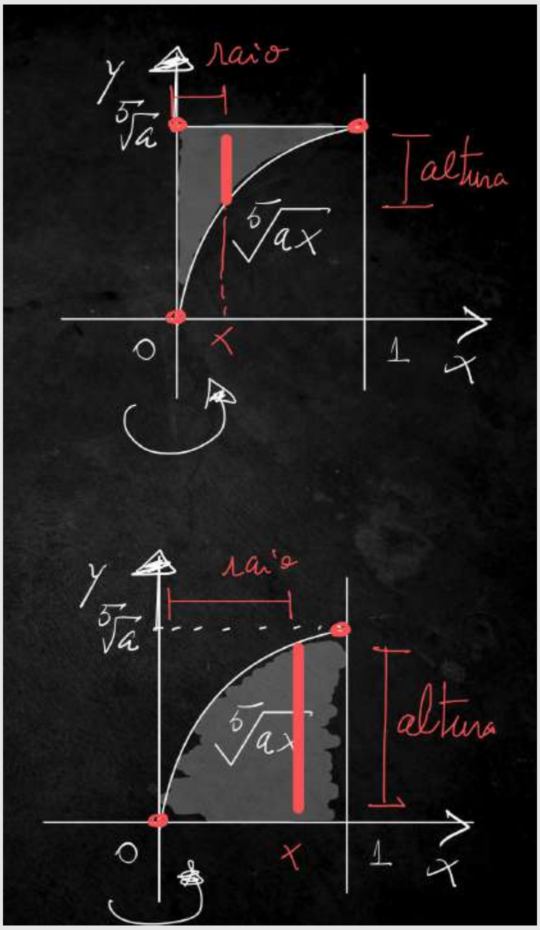


A área é dada por $\int_0^1 (y_T(x) - y_B(x)dx = \int_0^1 \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{ax}dx$

ou

a área é dada por $\int_0^1 (y_T(x) - y_B(x)dx = \int_0^1 \sqrt[5]{ax} - 0dx$

1,0 (b) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das cascas cilíndricas. Não calcule a integral.



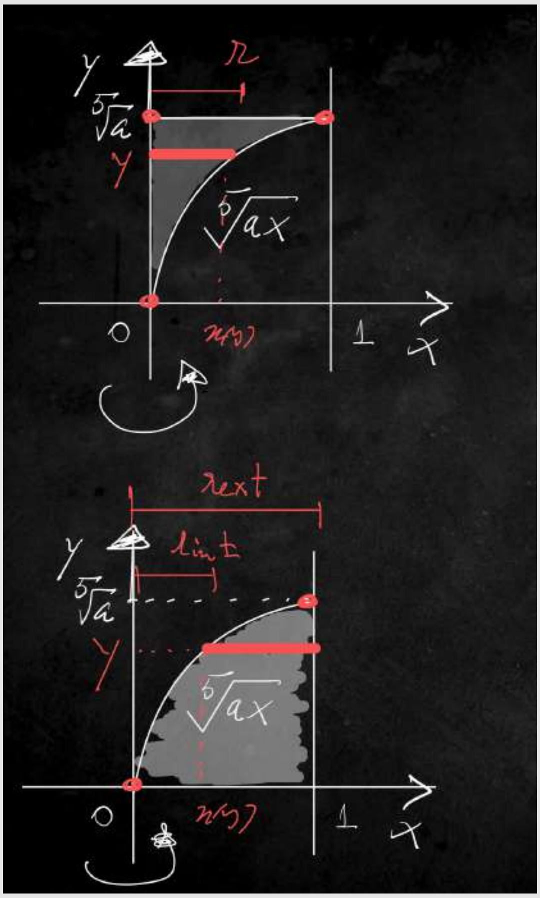
Uma casca típica ao nível $x \in [0,1]$ tem altura $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{ax}$ e raio x, donde o volume é dado por

$$\int_0^1 2\pi x(\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{ax})dx;$$

Na segunda interpretação, uma casca típica ao nível $x \in [0,1]$ tem altura $\sqrt[5]{ax}$ e raio x, donde o volume é dado por

$$\int_0^1 2\pi x \sqrt[5]{ax}dx.$$

1,0 (c) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das fatias. Não calcule a integral.



Uma fatia típica ao nível $y \in [0, \sqrt[5]{a}]$ é um disco de raio $x(y)$, em que $\sqrt[5]{ax(y)} = y$ i.e. $x(y) = y^5/a$, donde o volume é dado por

$$\int_0^{\sqrt[5]{a}} \pi \left(\frac{y^5}{a}\right)^2 dy;$$

Na segunda interpretação, uma fatia típica ao nível $y \in [0, \sqrt[5]{a}]$ é uma arruela de raio externo 1 e de raio interno $x(y)$, em que $\sqrt[5]{ax(y)} = y$ i.e. $x(y) = y^5/a$, donde o volume é dado por

$$\int_0^{\sqrt[5]{a}} \pi 1^2 - \pi \left(\frac{y^5}{a}\right)^2 dy.$$