Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT09570) – 25/03/22 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Determine:

1,0 (a) $\displaystyle\int \frac{\text{cossec}^2(1/x)}{x^2}dx$

Substituindo $u = 1/x$, $du = -1/x^2 dx$,

$$\int \frac{\text{cossec}^2(1/x)}{x^2}dx = -\int \text{cossec}^2 u du = \text{cotg } u + C = \text{cotg } \frac{1}{x} + C.$$

1,0 (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-1|dx$

Desenhando a curva $y = |x-1|$, observa-se que $\int_{-1}^{2} |x-1|dx$ expressa a soma das áreas de dois triângulos. Um triângulo tem base e altura igual a 2 e outro tem base e altura igual a 1, daí $\int_{-1}^{2} |x-1|dx = 2 + 1/2 = 5/2$.

Solução alternativa: como

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} |x-1|dx &= \int_{-1}^{1} |x-1|dx + \int_{1}^{2} |x-1|dx \\ &= \int_{-1}^{1} 1 - xdx + \int_{1}^{2} x - 1dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{2} \\ &= (1-1/2) - (-1-1/2) + (2-2) - (1/2-1) \\ &= 1/2 + 3/2 + 1/2 \\ &= 5/2. \end{aligned}$$

1,5 (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x}dx$, usando a substituição $x = 2\sec\theta$

(1,0)
Substituindo

$$\begin{cases} x = 2\sec\theta, \theta \in [0, \pi/2) \\ dx = 2\sec\theta \text{ tg } \theta \\ \sqrt{x^2-4} = \sqrt{4(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{4 \text{ tg }^2 x} = 2 \text{ tg } \theta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I := \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x}dx &= \int \frac{2 \text{ tg } \theta}{4\sec\theta} \cdot 2\sec\theta \text{ tg } \theta d\theta \\ &= \int \text{ tg }^2\theta d\theta \\ &= \int \sec^2\theta - 1 d\theta \\ &= \text{ tg } \theta - \theta + C. \end{aligned}$$

(0,5)
Voltando à variável x, lembre, do cálculo acima, $\sqrt{x^2-4} = 2 \text{ tg } \theta$. Daí,

$$I = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C.$$

Altenativamente, como $x = 2\sec\theta \Leftrightarrow \cos\theta = 2/x$ também pode escrever $\theta = \arccos 2/x$.

2,0 (d) $\displaystyle\int_0^1 e^x \text{ sen } x dx$

(1,5)
Integrando por partes duas vezes, derivando a função trigonométrica e primitivado a função exponencial obtemos

$$\begin{aligned} I := \int_0^1 e^x \text{ sen } x dx &= -\int_0^1 e^x \cos x dx + [e^x \text{ sen } x]_0^1 \\ &= -\left(+ \underbrace{\int_0^1 e^x \text{ sen } x dx}_{I} + [e^x \cos x]_0^1 \right) + [e^x \text{ sen } x]_0^1 \\ &= -I - [e^x \cos x]_0^1 + [e^x \text{ sen } x]_0^1 \end{aligned}$$

(0,5)
Donde

$$
\begin{aligned}
2I &= -\left[e^x \cos x\right]_0^1 + \left[e^x \text{ sen } x\right]_0^1 \\
I &= \frac{1}{2}\left(\left[e^x \cos x\right]_1^0 + \left[e^x \text{ sen } x\right]_0^1\right) \\
I &= \frac{1}{2}\left(1 - e \cos 1 + e \text{ sen } 1 - 0\right).
\end{aligned}
$$

1,0 (e) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x} \cos t^2 dt.$

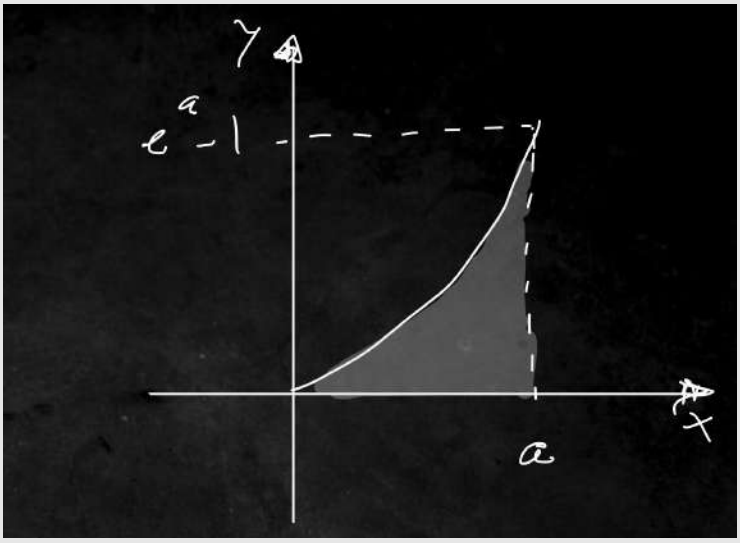
Pelo TFC, temos $\int_0^{2x} \cos t^2 dt = G(2x) - G(0)$, em que $G'(u) = \cos u^2$. Usando a Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \cos t^2 dt = G'(2x) \cdot 2 = 2 \cos 4x^2.$$

2. Seja $a > 0$ e considere a região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pelas curvas $y = e^x - 1$, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

1,5 (a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine sua área.

(0,75)



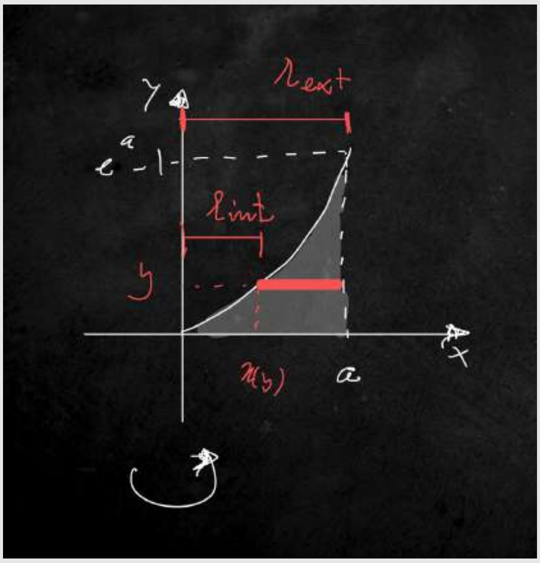
(0,75)
A área é dada por $\int_0^a e^x - 1 dx = \left[e^x - x\right]_0^a = (e^a - a) - (1 - 0) = e^a - a - 1.$

1,0 (b) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das cascas cilíndricas. Não calcule a integral.

Uma casca típica ao nível $x \in [0, a]$ tem altura $e^x - 1$ e raio x, donde o volume é dado por

$$\int_0^a 2\pi x(e^x - 1)dx.$$

1,0 (c) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das fatias. Não calcule a integral.



Uma fatia típica ao nível $y \in [0, e^a - 1]$ é uma arruela de raio externo a e de raio interno $x(y)$, em que $e^{x(y)} - 1 = y$ i.e. $x(y) = \ln(y + 1)$, donde o volume é dado por

$$\int_0^{e^a - 1} \pi a^2 - \pi \ln^2(y + 1)dy.$$