Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 01/04/22 (manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas. Use valores exatos.

1. Determine, se existirem:

1,5 (a) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{2x}\right)^x$

Temos uma indeterminação 1^∞, que transformamos em $\frac{0}{0}$
(1,0)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{2x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{2x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{a}{2x^2}\right) / \left(1 + \frac{a}{2x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{a}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{a}{2x}} \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

(0,5)
Por continuidade da exponencial

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{a}{2x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{a}{2x}\right)} = e^{a/2}.$$

(0,5)
Alternativamente, lembre o limite fundamental $e = \lim_{y\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ e faça uma mudança de variável $y = 2x/a$. Temos $x \to \infty \Leftrightarrow y \to \pm\infty$, consoante o sinal de a. Assim,
(0,5)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{2x}\right)^x &= \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay/2} \\
&= \lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a/2} \\
&= \left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a/2} \\
&= e^{a/2},
\end{aligned}
$$

em que na penúltima igualdade usamos a continuidade da função $x \mapsto x^{a/2}$.

2,0 (b) os pontos da curva $-x^2+xy+y^2=1$ em que a reta tangente tem declive $1/3$.

(1,0)
Derivando implicitamente em ordem a x,

$$
\begin{aligned}
-2x+y+xy'+2yy' &= 0 \\
-2x+y+(x+2y)y' &= 0 \\
y' &= \frac{2x-y}{x+2y}.
\end{aligned}
$$

(1,0)
A reta tangente tem declive $1/3$ quando

$$y'=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2x-y}{x+2y}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 6x-3y=x+2y \Leftrightarrow y=x.$$

Os pontos da forma (x,x) que estão na curva satisfazem

$$-x^2+x^2+x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Logo, os pontos são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

1,0 (c) $\displaystyle\int \frac{f(\ln x)}{x}dx$, sabendo que $f(x)$ é a derivada de $\frac{1}{\operatorname{sen} e^x}$

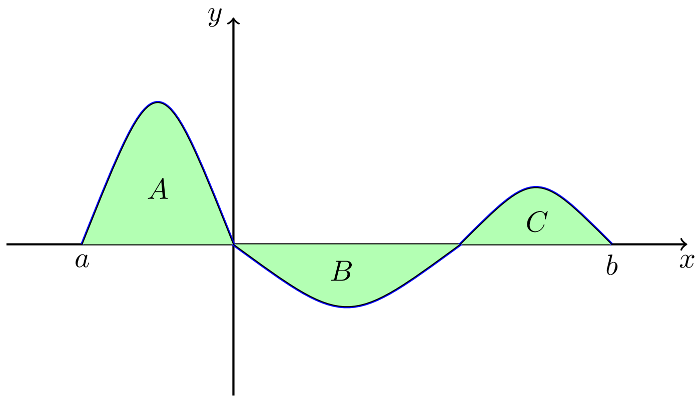
(0,5)
Substituindo $u=\ln x$, $du=1/x dx$,

$$I=\int \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(u)du=\frac{1}{\operatorname{sen} e^u}+C$$

notando que $\frac{1}{\operatorname{sen} e^u}$ é uma primitiva de $f(u)$.
(0,5)
Voltando a x

$$I=\frac{1}{\operatorname{sen} e^{\ln x}}+C=\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C.$$

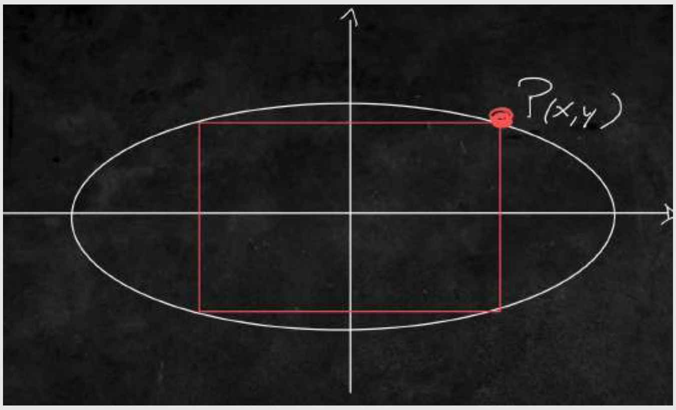
1,0 (d) $\displaystyle\int_a^b 2f(x) + |f(x)|dx$, sabendo que f tem o gráfico como em baixo e as regiões A, B, C têm áreas $3, 2, 1$, respetivamente.



$$\begin{aligned}\int_a^b 2f(x) + |f(x)|dx &= 2\int_a^b f(x)dx + \int_a^b |f(x)|dx\\ &= 2\,(3-2+1)+3+2+1\\ &= 10.\end{aligned}$$

2,0 2. Encontre as dimensões do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$.

Seja $P(x, y)$ o vértice do retângulo inscrito como na figura



O problema reduz-se a maximizar a área $2xy$ da parte do retângulo inscrito que está no primeiro e segundo quadrante sujeito a $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$, i.e., $y = \sqrt{1-x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$. Vamos, então, resolver o problema de otimização

$$\text{maximizar } A(x) = 2x\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = x\sqrt{4-x^2},\ x \in [0, 4].$$

(1,0)

Derivando

$$A'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}},$$

(0,5)

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

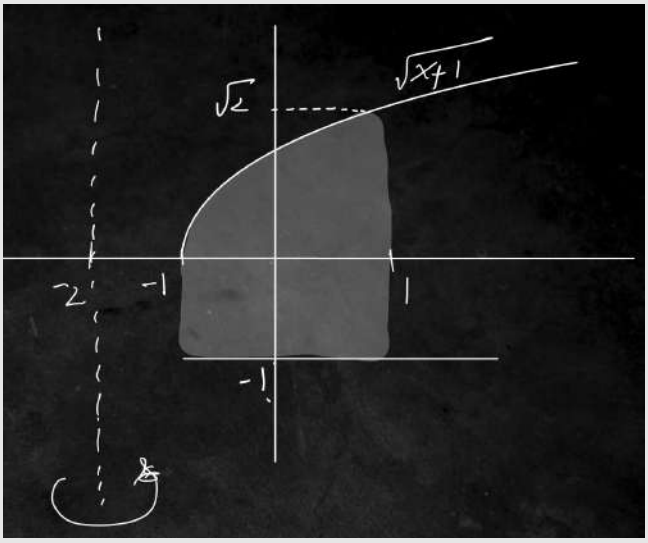
(0,5)

Como $A(0) = A(4) = 0$ e $A(\sqrt{2}) = 4 > 0$, o máximo de A ocorre para $x = \sqrt{2}$. As dimensões pretendidas são $2x = 2\sqrt{2}$ e $2y = 2\frac{1}{2}\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

2,5 3. Seja $\mathcal{R}$ a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x+1}$, $y = -1$, $x = -1$, $x = 1$. Seja $\mathcal{S}$ o sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = -2$. Escreva, sem calcular, as integrais que representam:

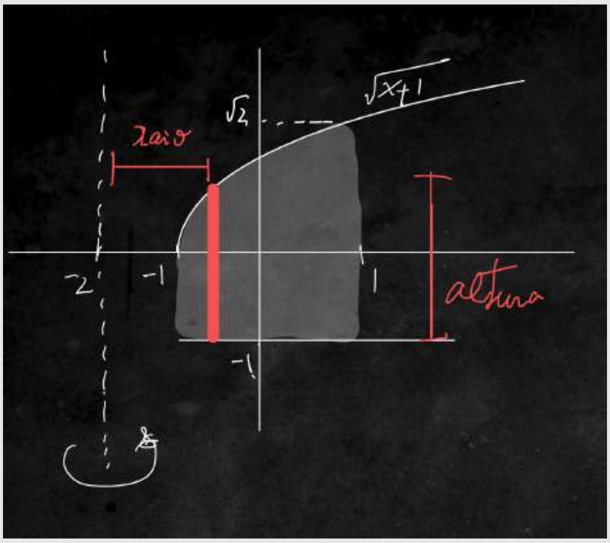
(a) a área de $\mathcal{R}$

Esboço



(0,5)
Área: $\int_{-1}^{1} y_T(x) - y_B(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{x+1} - (-1)dx$

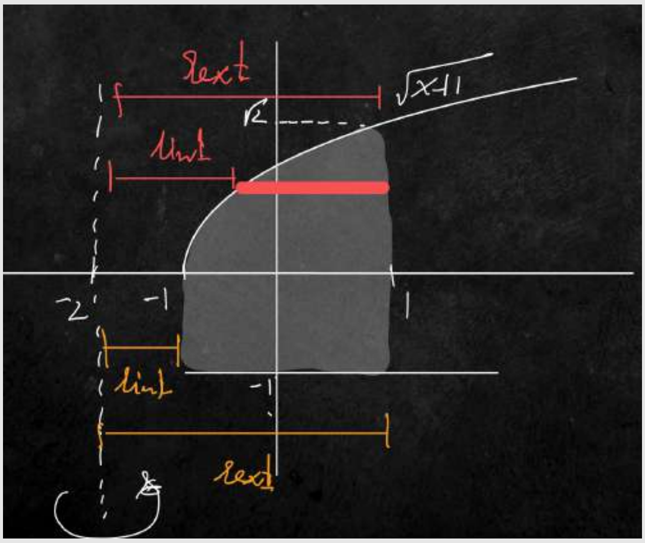
(b) o volume de $\mathcal{S}$, pelo método das cascas cilíndricas



(1,0)
Uma casca ao nível $x \in [-1, 1]$ tem raio $x - (-2) = x + 2$ e altura $\sqrt{x+1} - (-1) = \sqrt{x+1} + 1$, donde o volume é dado por

$$\int_{-1}^{1} 2\pi(x+2)(\sqrt{x+1}+1)dx.$$

(c) o volume de $\mathcal{S}$, pelo método do fatiamento.



(0,5)
Uma fatia ao nível $y \in [0, \sqrt{2}]$ é uma arruela com raio interno $x(y) - (-2)$ em que $\sqrt{x(y)+1} = y$, i.e., $x(y) = y^2 - 1$ e com raio externo $1 - (-2) = 3$; tem área

$$A(y) = \pi 3^2 - \pi(y^2+1)^2.$$

(0,5)
Já uma fatia ao nível $y \in [-1, 0]$ é uma arruela com raio interno 1 e com raio externo 3 de área

$$A(y) = \pi 3^2 - \pi 1^2 = 8\pi.$$

Assim, o volume é dado por

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{2}} A(y)dy &= \int_{-1}^{0} A(y)dy + \int_{0}^{\sqrt{2}} A(y)dy \\ &= \int_{-1}^{0} 8\pi dy + \int_{0}^{\sqrt{2}} 9\pi - \pi(y^2+1)^2 dy.\end{aligned}$$