

Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática - CCE  
PF – Cálculo 1 (MAT09570) – 01/04/22 (tarde)

Leia com atenção. Justifique suas respostas. Use valores exatos.

1. Determine, se existirem:

1,5

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{a}{x}$ , onde  $a > 0$

Temos uma indeterminação  $\infty \cdot 0$ , que transformamos em  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{a}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{x}}{x^{-3/2}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{a}{x} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{3}{2}x^{-5/2}} \\ &= \frac{2a}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cos \frac{a}{x} \\ &= \frac{2a}{3} \cdot \infty \cdot 1 \\ &= \infty, \end{aligned}$$

dado que  $a > 0$ .

2,0

(b) os pontos da curva  $x^2 - xy + y^2 = 1$  em que a reta tangente é horizontal

(1,0)

Derivando implicitamente,

$$\begin{aligned} 2x - y - xy' + 2yy' &= 0 \\ 2x - y + (-x + 2y)y' &= 0 \\ y' &= \frac{y - 2x}{-x + 2y}. \end{aligned}$$

(1,0)

A reta tangente é horizontal quando tem declive 0, ou seja

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Os pontos da forma  $(x, 2x)$  que estão na curva satisfazem

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1/3}.$$

Logo, os pontos são  $(\sqrt{1/3}, 2\sqrt{1/3})$  e  $(-\sqrt{1/3}, -2\sqrt{1/3})$ .

1,0

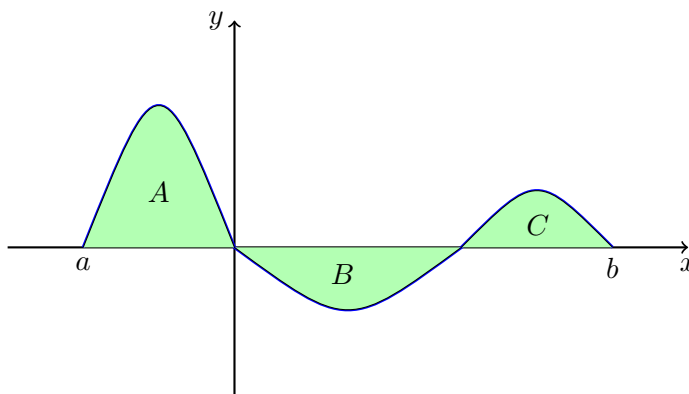
(c)  $\int_0^1 \text{sen}(g(x))g'(x)dx$ , sabendo que  $g(0) = \pi$  e  $g(1) = \pi/2$ .

Substituindo  $\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \\ x = 0 \rightarrow u = g(0) = \pi \\ x = 1 \rightarrow u = g(1) = \pi/2 \end{cases}$

$$\int_0^1 \text{sen}(g(x))g'(x)dx = \int_{\pi}^{\pi/2} \text{sen}(u)du = [-\cos u]_{\pi}^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(\pi) = -1.$$

1,0

(d)  $\int_b^a f(x) - |f(x)|dx$ , sabendo que  $f$  tem o gráfico como em baixo e as regiões  $A, B, C$  têm áreas 3, 2, 1, respectivamente.



$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) - |f(x)|dx &= -\int_a^b f(x) - |f(x)|dx \\ &= -\int_a^b f(x)dx + \int_a^b |f(x)|dx \\ &= -(3 - 2 + 1) + 3 + 2 + 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

2,0

2. Encontre os pontos da elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  que estão mais distantes do ponto  $(0, 1)$ .

(1,5)

Seja  $P(x, y)$  um ponto da elipse. A distância de  $P$  a  $(0, 1)$  é  $d = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ . Substituindo  $x^2 + 4y^2 = 4$ , i.e.  $x^2 = 4 - 4y^2$ , obtemos  $d = \sqrt{4 - 4y^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{4 - 4y^2 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{5 - 2y - 3y^2}$ . O valor de  $y$  que otimiza  $d$  é o mesmo que otimiza  $d^2$ . Assim, resolvemos o problema de otimização:

$$\text{maximizar } f(y) = 5 - 2y - 3y^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Derivando  $f'(y) = -2 - 6y$  e  $f'(y) = 0 \Leftrightarrow -2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = -1/3$ .

(0,5)

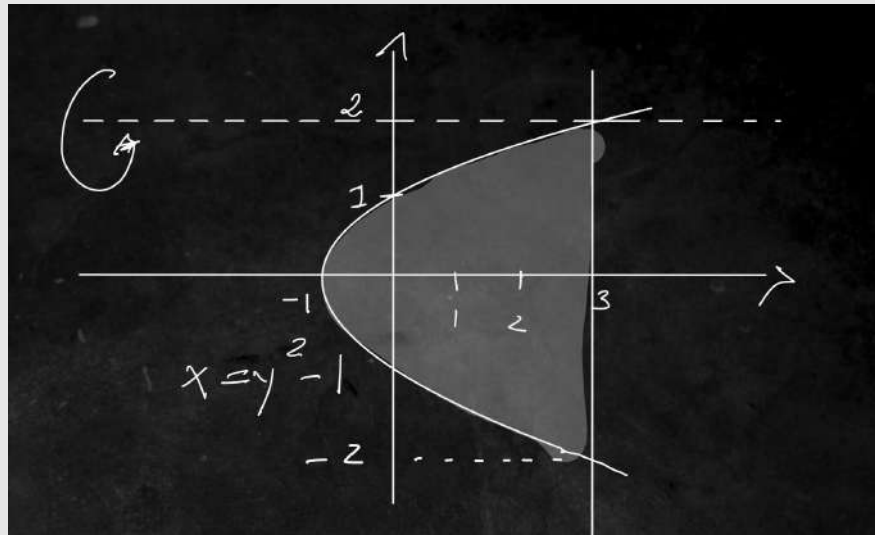
Note que  $f'(y) > 0 \Leftrightarrow y < -1/3$  (e  $f'(y) < 0 \Leftrightarrow y > -1/3$ ), donde  $f$  admite máximo global para  $y = -1/3$ . A abscissa correspondente satisfaz  $x^2 + 4/9 = 4$ ,  $x^2 = 32/9$ , i.e.,  $x = -4\sqrt{2}/3$  ou  $x = 4\sqrt{2}/3$ . Portanto, os pontos pretendidos são  $(-4\sqrt{2}/3, -1/3)$  e  $(4\sqrt{2}/3, -1/3)$ .

2,5

3. Seja  $\mathcal{R}$  a região do plano  $xy$  delimitada pelas curvas  $x = y^2 - 1$ ,  $x = 3$ . Seja  $\mathcal{S}$  o sólido obtido por revolução de  $\mathcal{R}$  em torno da reta  $y = 2$ . Escreva, sem calcular, as integrais que representam:

(a) a área de  $\mathcal{R}$

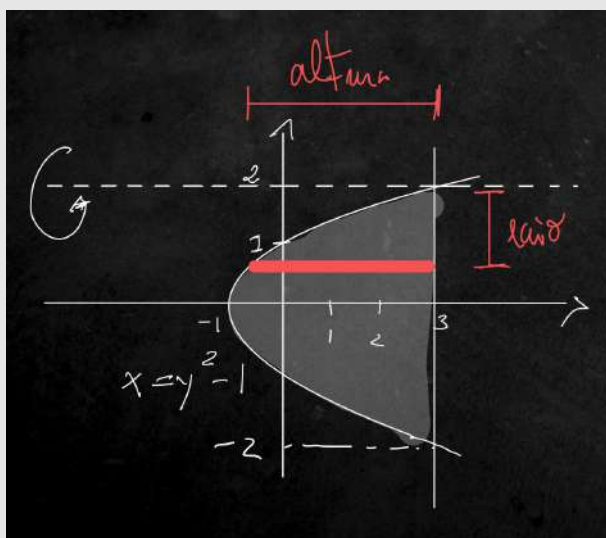
Esboço



(0,5)

$$\text{Área: } \int_{-2}^2 x_R(y) - x_L(y) dy = \int_{-2}^2 3 - (y^2 - 1) dy.$$

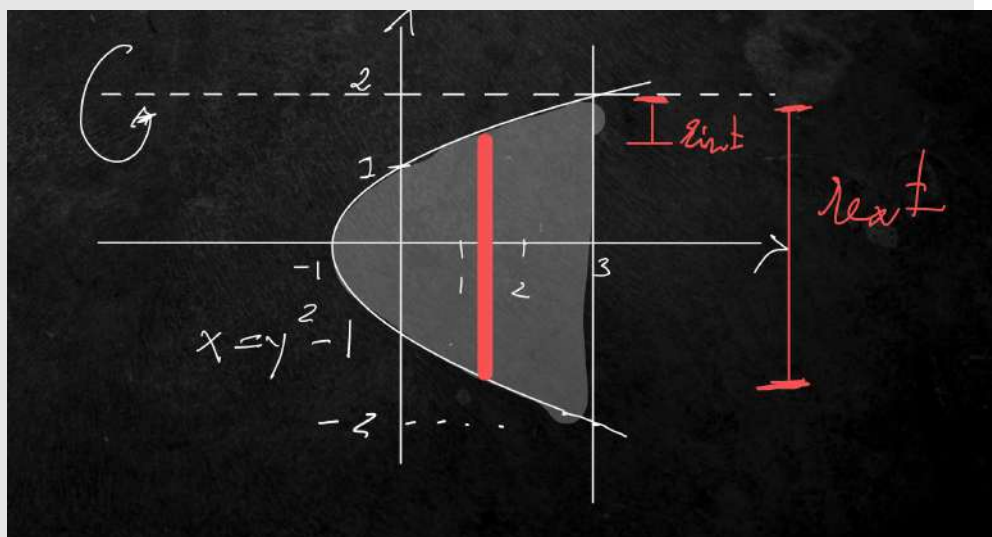
(b) o volume de  $\mathcal{S}$ , pelo método das cascas cilíndricas



Uma casca ao nível  $y \in [-2, 2]$  tem raio  $2 - y$  e altura  $3 - (y^2 - 1)$ , donde o volume é dado por

$$\int_{-2}^2 2\pi(2 - y)(3 - y^2 + 1)dy.$$

(c) o volume de  $\mathcal{S}$ , pelo método do fatiamento.



(1,0)

Uma fatia ao nível  $x \in [-1, 3]$  é uma arruela. Invertendo  $x = y^2 - 1$  e atentando aos casos de sinal positivo e de sinal negativo de  $y$ , a arruela tem raio interno  $2 - \sqrt{x + 1}$  e tem raio externo  $2 - (-\sqrt{x + 1}) = 2 + \sqrt{x + 1}$ .

Assim, o volume é dado por

$$\int_{-1}^3 \pi(2 + \sqrt{x+1})^2 - \pi(2 - \sqrt{x+1})^2 dx.$$