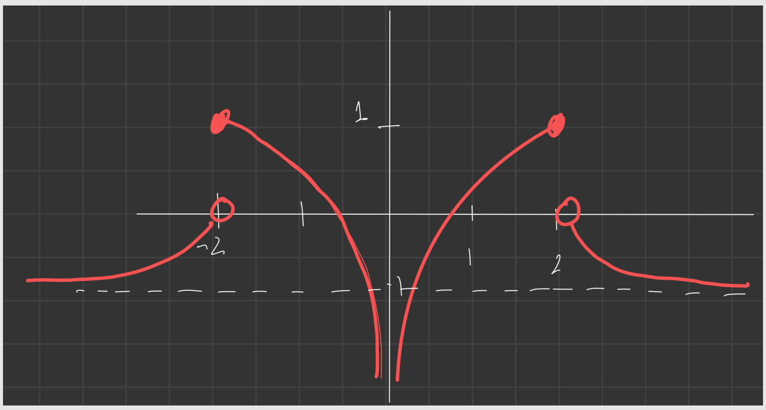
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P1 – Cálculo 1 (MAT 15925/09570) – 27/05/22 (Manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

2,0 1. Esboce o gráfico de uma função f que admita todas as propriedades seguintes :

(a) f é par
(b) $x = 0$ é assíntota vertical de f
(c) f é crescente em $(-\infty, -2)$
(d) f é decrescente no intervalo $(-2, 0)$
(e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0$
(f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$
(g) $y = -1$ é assíntota horizontal de f
(h) f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo



3,0 2. Determine, se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(7x - 3x^2 + 7)x}{-5 + x^3}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{(7x-3x^2+7)x}{-5+x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-3x^3+7x}{-5+x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^2-3x^3+7x}{x^3}}{\frac{-5+x^3}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{7/x-3+7/x^2}{-5/x^3+1} \\
&= \frac{0-3+0}{0+1} \\
&= -3.
\end{aligned}
$$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x-3}-1}{7x-7}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x-3}-1}{7x-7} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x-3}-1}{7x-7}\,\frac{\sqrt{4x-3}+1}{\sqrt{4x-3}+1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4x-3-1}{(7x-7)(\sqrt{4x-3}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{7(x-1)(\sqrt{4x-3}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4}{7(\sqrt{4x-3}+1)} \\
&= \frac{4}{7(2)} \\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$, sabendo que $\frac{x^2-4}{x-2} < f(x) < e^{x-2}+3$ para todo $x \neq 2$.

Dado o enquadramento para f e dado que

$$
\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4
$$

e

$$
\lim_{x\to 2} e^{x-2}+3 = e^0+3 = 4,
$$

o Teorema do Confronto garante que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

2,5 3. Seja $f(x) = \ln(e^{2x}-1)$. Determine:

(a) $f^{-1}(x)$ e a imagem de f^{-1}

$$
\begin{aligned}
y &= \ln(e^{2x} - 1) \\
e^y &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x} &= e^y + 1 \\
2x &= \ln(e^y + 1) \\
x &= \frac{1}{2}\ln(e^y + 1),
\end{aligned}
$$

donde $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(e^x + 1)$.
A imagem de f^{-1} é o domínio de f: e um número x está no domínio de f quando

$$
\begin{aligned}
e^{2x} - 1 &> 0 \\
e^{2x} &> 1 \\
2x &> \ln 1 \\
x &> 0.
\end{aligned}
$$

Assim, a imagem de f^{-1} é o intervalo $(0, \infty)$.

(b) $g(x)$ tal que $f(g(x)) = 2x$.

Sabemos que $f^{-1}(f(x)) = x$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= 2x \\
g(x) &= f^{-1}(2x) \\
&= \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1).
\end{aligned}
$$

2,5 4. Justifique se é verdadeiro ou se é falso:

(a) " $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem solução no intervalo $(-1, 0)$"

Verdadeiro.
Seja $f(x) = x^{10} - 10x^2 + 5$. Temos $f(-1) = 1 - 10 + 5 = -4 < 0$ e temos $f(0) = 5 > 0$. Como f é contínua (sendo um polinômio), então o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$, i.e., $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem solução no intervalo $(-1, 0)$.

(b) "$h(x) = (f(x))^2$ é função par para toda a função $f(x)$".

Falso.
Por exemplo, tome $f(x) = x + 1$. Temos $h(x) = f(x)^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ e temos $h(-1) = 0$ e $h(1) = 4$, logo, h não é uma função par.