

Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática - CCE  
P2 – Cálculo 1 (MAT 15925/09570) – 06/07/22 (Manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

4,0

1. Determine :

(a) uma equação da reta tangente a  $y = (1 + 2x)^3(1 + x + x^2)^5$  no ponto  $(0, 1)$

$(1,0)$

$$\begin{aligned}y'(x) &= 3(1 + 2x)^2 \cdot 2 \cdot (1 + x + x^2)^5 + (1 + 2x)^3 \cdot 5(1 + x + x^2)^4(1 + 2x) \\ &= 6(1 + 2x)^2 \cdot (1 + x + x^2)^5 + 5(1 + 2x)^4(1 + x + x^2)^4\end{aligned}$$

$(0,5)$

Portanto, o declive é  $y'(0) = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 11$  e

$$y - 1 = 11(x - 0)$$

é uma equação para a reta tangente pretendida.

(b)  $\frac{dy}{dx}$  sabendo que  $y^x = x^{y+1}$

$(0,2)$

Aplicamos logaritmo.

$$\begin{aligned}y^x = x^{y+1} &\Rightarrow \ln y^x = \ln x^{y+1} \\ &\Rightarrow x \ln y = (y + 1) \ln x\end{aligned}$$

$(1,3)$

derivamos implicitamente com respeito a  $x$  e isolamos  $y'$

$$\begin{aligned}\ln y + x \frac{y'}{y} &= y' \ln x + (y+1) \frac{1}{x} \\ xy \ln y + x^2 y' &= xy y' \ln x + y(y+1) \\ x^2 y' - xy y' \ln x &= y(y+1) - xy \ln y \\ (x^2 - xy \ln x) y' &= y(y+1) - xy \ln y \\ x(x - y \ln x) y' &= y(y+1 - x \ln y) \\ y' &= \frac{y(y+1 - x \ln y)}{x(x - y \ln x)}.\end{aligned}$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x}$ .

(1,0)

Temos uma indeterminação  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos a Regra de L'Hospital duas vezes

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(x - \pi)}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{-\cos x} = 2.$$

3,0

2. Considere  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ,  $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1 - 2x)}{x^4}$ . Acerca de  $f$ , determine

(a) o domínio e assíntotas verticais/horizontais

(0,2)

O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  devido ao termo  $1/x$ .

(0,5)

Quanto a assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-1/x} = e^{-1/\infty} = e^{0^-} = 1^-$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-1/x} = e^{-1/-\infty} = e^{0^+} = 1^+,$$

portanto  $y = 1$  é a única assíntota horizontal.

(0,3)

Quanto a assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = e^{-1/0^-} = e^\infty = \infty,$$

logo  $x = 0$  é uma assíntota vertical. Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então não existem outras assíntotas verticais.

Observação:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0$ .

(b) os intervalos onde é crescente/decrecente, máximos/mínimos locais

(0,5)

Como  $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pelo Teste C/D,  $f$  é crescente em  $(-\infty, 0)$  e em  $(0, \infty)$  e não existem extremos.

Atenção: a afirmação de que “ $f$  é crescente em  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ” é falsa, pois, por exemplo,  $-1 < 1$ , mas  $f(-1) > f(1)$ .

(c) intervalos onde é côncava para cima/baixo e pontos de inflexão

(0,75)

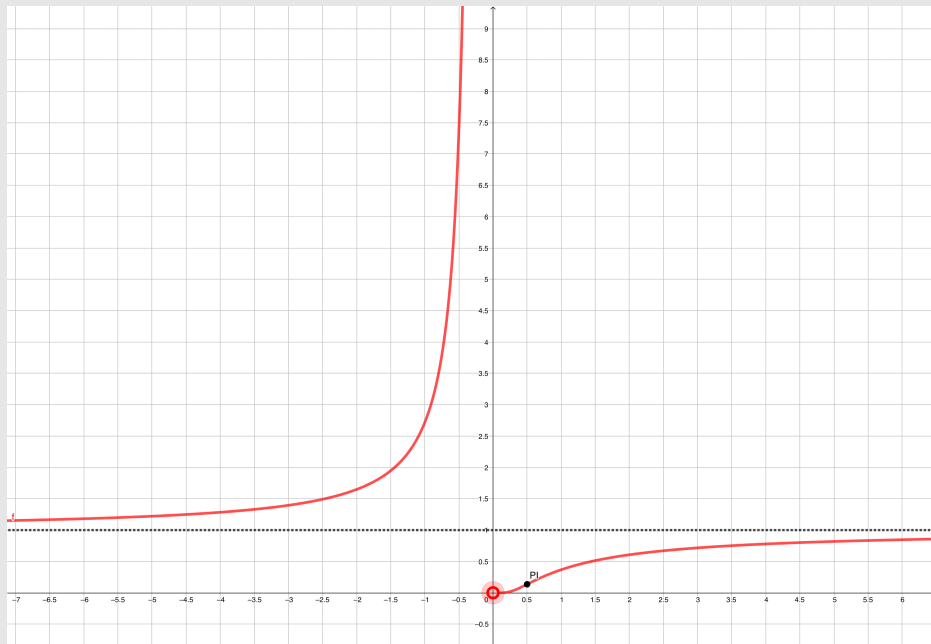
Como  $f''(x) = 0$  quando  $1 - 2x = 0$  i.e.  $x = 1/2$ ; o sinal de  $f''$  é o sinal de  $1 - 2x$ , pois  $e^{-1/x}/x^4 > 0$  para todo  $x \neq 0$ ; aplicando o Teste da Concavidade, obtemos o resumo

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
sinal de $f''$	+	+	-
concavidade de $f$	cima	cima	baixo

Concluimos que existe um único pontos de inflexão em  $(1/2, e^{-2})$ . Observe que  $e^{-2} = 1/e^2 \simeq 1/9$ , com uma aproximação (bem) rude  $e \simeq 3$ .

(d) um esboço, evidenciando a informação obtida nas partes acima.

(0,75)



2,0

3. Uma caixa com base quadrada e sem tampa tem capacidade para  $4000 \text{ cm}^3$ . Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material utilizado.

(1,0)

Queremos minimizar a área da superfície total utilizada, i.e.  $l^2 + 4lh$ , onde  $l$  é o comprimento, em cm, do lado da base quadrada e  $h$  é a altura, em cm, da caixa, sujeito a um volume fixado de  $l^2h = 4000$ . Da restrição para o volume, obtemos  $h = 4000/l^2$ . Substituindo na fórmula da área obtemos o problema de otimização

$$\text{Minimizar } A(l) = l^2 + \frac{16000}{l}, \quad l > 0.$$

(0,5)

Temos  $A'(l) = 2l - \frac{16000}{l^2} = \frac{2l^3 - 16000}{l^2}$  e  $A'(l) = 0$  quando  $2l^3 = 16000$ , i.e.,  $l = 20$ .

(0,5)

Note que  $A'(l) < 0$  para todo  $l < 20$  e  $A'(l) > 0$  para todo  $l > 20$ , logo  $A$  atinge um mínimo absoluto para  $l = 20$ . Concluímos que as dimensões pretendidas são  $l = 20$  e  $h = 4000/20^2 = 10$ .

1,0

4. Mostre que a equação  $\cos(\pi x) + 2\pi x = 0$  não pode ter mais que uma solução.

Se existissem duas soluções da equação, então a função derivável  $f(x) = \cos(\pi x) + 2\pi x$  teria dois zeros, digamos  $f(a) = 0$  e  $f(b) = 0$ , com  $a < b$ . Pelo Teorema de Rolle, existiria  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Porém, para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{sen } \pi x &< 1 \\ -\pi \text{ sen } \pi x &> -\pi \\ f'(x) = -\pi \text{ sen } \pi x + 2\pi &> \pi, \end{aligned}$$

uma contradição. Daí, se concluí que é falso que existam dois zeros.

Alternativamente, sem usar um argumento por contradição, pode-se argumentar que como  $f'(x) > \pi > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  é estritamente crescente, injetiva, impossibilitando a existência de mais que um zero.