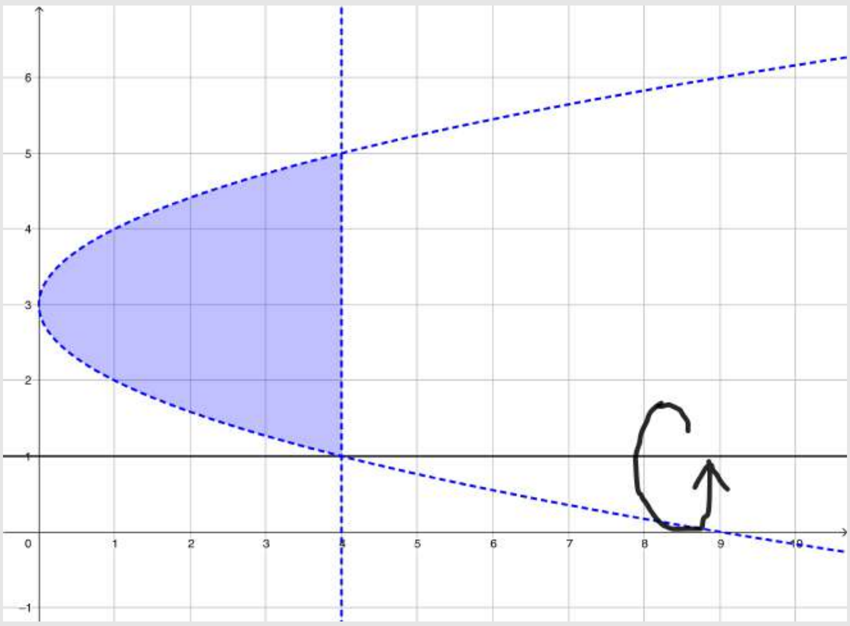
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P3 – Cálculo 1 (MAT 15925/09570) – 12/08/22 (Manhã)

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

4,0 1. Considere a região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pelas curvas $x = (y-3)^2$, $x = 4$ e considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 1$.

(a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e determine sua área.

(0,75)



Interseção das curvas:

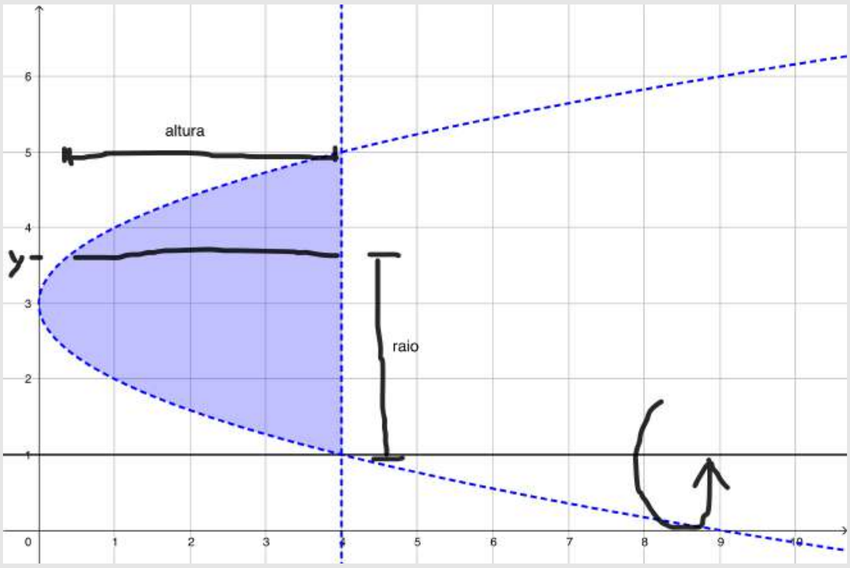
$$\begin{cases} x = 4 \\ x = (y-3)^2 \end{cases}$$

ocorre para $4 = (y-3)^2$, $|y-3| = 2$, i.e. $y = 1$ ou $y = 5$.
Assim, a área é
(0,75)

$$\begin{aligned}\int_1^5 x_R(y) - x_L(y)dy &= \int_1^5 4 - (y-3)^2 dy \\ &= \left[4y - \frac{(y-3)^3}{3}\right]_1^5 \\ &= 20 - \frac{8}{3} - 4 - \frac{8}{3} \\ &= 16 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

(b) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das cascas cilíndricas. Não calcule a integral.

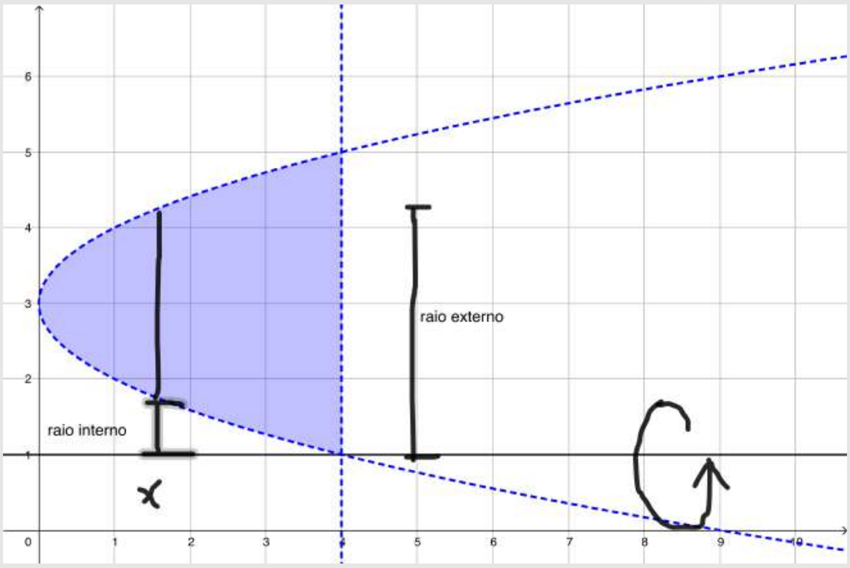
(1,0)



Uma casca ao nível $y \in [1, 5]$ tem raio $y - 1$ e altura $4 - (y-3)^2$ donde o volume é dado por

$$\int_1^5 2\pi(y-1)[4-(y-3)^2]dy.$$

(c) Escreva uma integral que expresse o volume de $\mathcal{S}$ pelo método das fatias. Não calcule a integral.



(1,0)
Uma fatia ao nível $x \in [0,4]$ é um anel com raios externo/interno dados por $y(x)-1$ em que $(y(x)-3)^2 = x$, i.e $|y(x)-3| = \sqrt{x}$, i.e. $y(x) = 3+\sqrt{x}$ ou $y(x) = 3-\sqrt{x}$. Ou seja, o raio externo é $2+\sqrt{x}$ e o raio interno é $2-\sqrt{x}$. Assim, o volume é
(0,5)

$$\int_0^4 \pi(2+\sqrt{x})^2 - \pi(2-\sqrt{x})^2 dx.$$

6,0 2. Determine :

(a) $\displaystyle\int x \text{ sen } (2x+1)dx$

(1,5)
Integrando por partes

$$\begin{cases} u = x & dv = \text{ sen } (2x+1)dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos\,(2x+1)}{2} \end{cases}$$

$$\int x \text{ sen } (2x+1)dx = +\int \frac{\cos\,(2x+1)}{2} - \frac{\cos\,(2x+1)}{2}x$$
$$= \frac{\text{sen } (2x+1)}{4} - \frac{\cos\,(2x+1)}{2}x + C.$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}dx$

(0,75)

$$\text{Substituindo} \begin{cases} u = e^{2x} + x \\ du = 2e^{2x} + 1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = e^2 + 1 \end{cases}$$

(0,75)

$$\int_0^1 \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} dx = \int_1^{e^2+1} \frac{1}{u} du = \ln|u| \Big|_1^{e^2+1} = \ln|e^2 + 1| - \ln|1| = \ln(e^2 + 1).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

(0,75)

$$\text{Substituindo} \begin{cases} u = x(x^2 + 1) = x^3 + x \\ du = 3x^2 + 1dx \end{cases}$$

(0,75)

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x^3 + x| + C.$$

(0,75)
Alternativamente, podemos decompor em frações parciais:

$$\frac{3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$3x^2 + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x.$$

$$\text{Igualando coeficientes} \begin{cases} A + B = 3 \\ C = 0 \\ A = 1, \end{cases} \quad \text{donde } A = 1,\ B = 2,\ C = 0 \text{ e}$$

(0,75)

$$I = \int \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln|x| + \ln|x^2 + 1| + C,$$

como na resolução mais curta acima.

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} dx$ (dica: complete quadrados)

(1,0)

Completando quadrados $x^2-2x = x^2-2x+1-1 = (x-1)^2-1$. Substituindo

$$\begin{cases} (x-1) = \sec\theta, \quad \theta \in [0, \pi/2) \\ dx = \sec\theta \ \mathrm{tg}\ \theta \\ \sqrt{(x-1)^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = |\ \mathrm{tg}\ \theta| = \ \mathrm{tg}\ \theta, \end{cases}$$

pois, $\ \mathrm{tg}\ \theta \geq 0$.
Assim,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1} dx &= \int \frac{\mathrm{tg}\ \theta}{\sec\theta} \sec\theta \ \mathrm{tg}\ \theta d\theta \\ &= \int \ \mathrm{tg}\ ^2\theta d\theta \\ &= \int \sec^2\theta - 1 d\theta \\ &= \ \mathrm{tg}\ \theta - \theta + C. \end{aligned}$$

(0,5)
Voltando a x, pelos cálculos acima (em chaves), $\ \mathrm{tg}\ \theta = \sqrt{x^2-2x}$. Assim, $\theta = \ \mathrm{arctg}\ \sqrt{x^2-2x}$ e

$$I = \sqrt{x^2-2x} - \ \mathrm{arctg}\ \sqrt{x^2-2x} + C.$$